

Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos

PLASTIFICACION PROGRESIVA DE UN TALUD COULOMBIANO



Madrid, Mayo 1.971

Tesis doctoral

Luis del Cañizo Perate

"CURRICULUM VITAE" DE LUIS DEL CAÑIZO PERATE

- Feb. 1942 Nacido en Madrid.
- 1952-1959 Bachillerato en el Colegio "Estudio" de Madrid, con 27 Matrículas de Honor, 17 Sobresalientes y 18 Notables.
- Jun. 1958 Reválida de Bachillerato Superior con Matrícula de Honor.
- Jun. 1960 Selective en la Universidad de Madrid.
- Jun. 1961 Iniciación en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- Mayo 1962 Premio Pilar Careaga, de AMIC, por haber ingresado en una Escuela Técnica Superior de Ingenieros en una sola convocatoria.
- 1961-1963 Carrera de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, con 6 Matrículas de Honor, 18 Sobresalientes y 16 Notables. Asignatura de Geotecnia y Cimientos: 3er. Curso, Sobresaliente; 5º Curso, Matrícula de Honor. Especialidades: "Cimientos y Estructuras" y "Construcción". Calificación final: Sobresaliente. Número de promoción: Uno.
- 1965 Premio Nacional Fin de Carrera, y Victor de Plata al mérito profesional.
Premio "Escalona" de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
Premio "Altos Hornos" de AMIC.
Premio Ordinario González Baylín, de la Cámara de Industria de Madrid.
- Enero 1969 Premio Extraordinario de la Fundación González Baylín, de la Cámara de Industria de Madrid (convocado entre los números "uno" de las distintas Escuelas Técnicas Superiores de Ingenieros, y dotado de un Diploma y 60.000 pesetas) por el trabajo original "Nuevo método de cálculo de placas apoyadas en un semiespacio elástico no homogéneo".
- 1969-1970 Profesor Encargado de Curso de Geotecnia y Cimientos en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Madrid.
1970-1971

I N D I C E

=====

	Pág.
1.- Resumen.	4
2.- Planteamiento del problema del talud.	8
3.- Métodos de cálculo usuales.	
3.1. Método elástico.	12
3.2. Método del estado límite.	
3.2.1. Procedimientos de tanteo.	14
3.2.2. Procedimientos analíticos.	16
4.- Método general elastoplástico o de plasticidad contenida.	
4.1. Presentación.	21
4.2. Trabajos previos.	24
4.3. Variables fundamentales escogidas.	26
5.- Problemas particulares estudiados.	
5.1. Aplicaciones ya realizadas.	32
5.2. Talud plano.	
5.2.1. Estudio de la malla.	38
5.2.2. Talud coulombiano.	44
5.3. Talud ortolisténico.	50
5.4. Talud isorresistente.	55
5.5. Talud en terreno con dilatación prefijada.	64
6.- Conclusiones.	
6.1. Resumen de conclusiones.	69
6.2. Perspectivas futuras.	70
6.3. Comentario final.	71

Agradecimiento.

Apéndice A - Plasticidad.

Apéndice B - Método de los elementos finitos.

Apéndice C - Listados del programa de cálculo.

Apéndice D - Resultados de ordenador (ejemplo).

Apéndice E - Notación.

Apéndice F - Bibliografía.

Indice del Apéndice A - Plasticidad

=====

	<u>Pág.</u>
1.- Introducción .	3
2.- Elasticidad .	6
3.- Plasticidad.	10
4.- Criterios de rotura.	
4.1.- Sólidos cohesivos .	17
4.2.- Sólidos con rozamiento.	
4.2.1.- Sólido elastoplástico perfecto.	21
4.2.2.- Sólido rigidizable."Cam Clay".	30
4.3.- Sólidos sin potencial plástico.	36
5.- Aplicación a la mecánica del suelo.	
5.1.- Discusión .	38
5.2.- Relaciones incrementales tensión deformación propuestas.	41

Indice del Apéndice B - Método de los elementos finitos =====

	<u>Pág.</u>
1.- Generalidades.	3
2.- Fundamento teórico.	
2.1.- Hipótesis y método.	5
2.2.- Formulación.	8
2.3.- Equivalencias del método.	15
3.- Convergencia y unicidad.	19
4.- Aplicación del método.	
4.1.- Tipos de elementos.	
4.1.1.- Problemas planos.	26
4.1.2.- Problemas tridimensionales.	37
4.2.- Condiciones de contorno.	
4.2.1.- Introducción de las condiciones de contorno.	39
4.2.2.- Prescripción de corrimientos.	41
4.3.- Resolución del sistema. Particiones.	45
5.- Introducción de la plastificación.	
5.1.- Generalidades.	50
5.2.- Método incremental de la matriz de rigidez tangente.	55
6.- Programa de cálculo electrónico.	59
6.1.- Variables escogidas.	60
6.2.- Organigrama.	64
6.3.- Manejo del programa.	67

1.- RESUMEN

La Mecánica de Suelos ha estudiado tradicionalmente sus problemas, y entre ellos el del talud, por dos procedimientos: el cálculo - elástico, y el método del estado límite en equilibrio plástico. El primero indica la forma de trabajar del terreno, pero proporciona grandes errores al existir casi siempre en la masa de suelo zonas plastificadas, que crean unos reajustes de tensiones y unas deformaciones mucho mayores. El segundo da un valor bastante preciso del coeficiente de seguridad de que se dispone, pero es sólo comprobatorio, dando una información muy pobre o nula sobre el modo de comportarse el terreno y las deformaciones que sufre, o referente a donde sobra o falta material.

En la realidad en el suelo coexisten unas zonas en estado elástico y otras en estado plástico, por lo cual su cálculo riguroso presenta grandes dificultades. El progreso de las teorías plásticas y el de los ordenadores electrónicos han dado recientemente un gran impulso a la elastoplasticidad, permitiendo abordar mediante el cálculo numérico un problema tan complejo, y reproducir la realidad con modelos matemáticos que cada vez se ciñen más a ella.

En la presente tesis se estudia el problema del talud, en estado de deformación plana, por el método de los elementos finitos (ver apéndice B). La elección de dicho método se justifica porque discretiza el continuo en elementos triangulares, y tiene gran flexibilidad para adaptarse a taludes de cualquier forma, y para suministrar precisión suficiente incluso en las proximidades del punto singular que es el pie del talud.

El mayor esfuerzo se ha hecho en lo relativo a la aplicación de la plasticidad (ver apéndice A), punto en el que fallan la mayoría

de los autores, por ignorancia o por las dificultades técnicas que hay que vencer para mantener el rigor teórico deseable. Se utiliza aquí un modelo matemático de terreno isótropo elasto-plástico perfecto, con cohesión y rozamiento interno, que se rige por el criterio de rotura de Mohr Coulomb y que cumple las relaciones tensión deformación de Drucker y Prager, deducidas por la ley de la normalidad. Como variante se utiliza también un modelo de terreno analogo al anterior, pero con una dilatancia constante prefijada, cuyas relaciones incrementales tensión deformación para cuerpos elastoplásticos se deducen en el apartado A - 5.2. El empleo de este último modelo, sin potencial plástico, es una novedad interesante, que permite estudiar la influencia de la dilatancia en los taludes, y abre el camino para un cálculo más riguroso de problemas cuyas condiciones de contorno se den en corrimientos, y no en tensiones. Sus limitaciones principales son - el no considerar la anisotropía, los efectos viscosos y la rigidización energética.

Para realizar los cálculos se ha confeccionado un programa de cálculo electrónico de elementos finitos muy versátil. Permite el estudio de terrenos no homogéneos, de problemas elásticos anisótropos y de elastoplásticos isótropos con los dos modelos de suelo citados en el párrafo anterior. Dado que la progresión de la zona en estado plástico depende del proceso de cargas, se ha procurado mantener en este aspecto una flexibilidad y un rigor poco frecuentes: El programa aplica automáticamente un vector de cargas (peso propio por ejemplo) que aumenta progresivamente hasta alcanzar un valor prefijado, y luego si se desea se añade, también por incrementos, otro vector de cargas diferente (sobrecarga o fuerza exterior, muro que se desplaza, etc..).

Los problemas concretos tratados son los siguientes:

Talud plano inclinado 75 grados, con rozamiento interno y cohesión.

Estudio de sus deformaciones y tensiones debidas al peso propio, y crecimiento de la zona plastificada, la cual se inicia en el pie del talud para un valor de la densidad $0,4 \ c/\gamma H$ y alcanza la coronación para un valor mayor del teórico de $7,46 \ c/\gamma H$. La zona plastificada progresa contigua al frente del talud, con una concordancia regular con los resultados obtenidos por el método del círculo de deslizamiento pésimo.

Talud ortolisténico, de superficie exterior convexa y línea de deslizamiento recta. Se comprueba que carece de importancia práctica. Su empleo tiene ventaja económica sólo en taludes excavados de gran altura, en las condiciones iniciales de saturación y no drenaje ($\phi = 0$), pero con pendientes tan suaves que no tiene interés.

Talud isorresistente. Es el perfil del talud tal que plastificaría todo él simultáneamente, motivo por lo que se debe considerar el más económico al aprovechar mejor el material. Su forma se deduce por el método de Sokolowsky de las características de tensiones, empleando un modelo de suelo plástico rígido y sin tener en cuenta la compatibilidad de deformaciones, motivo por el que existen serias dudas acerca de su bondad. Al estudiarlo por el método elastoplástico, más riguroso, se comprueba que plastifica prematuramente en el pie del talud, debida a la concentración de tensiones que aparece en este punto singular, para una densidad 1,92 veces menor a la teórica. Sin embargo, se comprueba por el crecimiento de la zona plastificada que su forma se aproxima bastante a la isorresistente, al menos para los valores reales del coeficiente de Poisson y del coeficiente de empuje al reposo.

Talud en terreno con dilatación nula. Los resultados obtenidos comparados con los del caso anterior indican que la dilatación no influye aprecia-

blemente en la rotura de los taludes, disminuye un poco las tensiones horizontales, aumenta levemente el área en estado de rotura, y sólo influye en magnitud importante en los corrimientos.

Como posible continuación de la presente tesis, dentro de la senda de la elastoplasticidad, se apunta el empleo de teorías plásticas más prometedoras, como son la Cam-Clay modificada de Roscoe y Burland, y los terrenos rigidizables con rozamiento y dilatación variables, así como la extensión del estudio de los taludes al problema del muro rígido sometido a empujes activos y pasivos.

2.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DEL TALUD

El ingeniero, al cumplir su misión de transformar la naturaleza se encuentra frecuentemente con la necesidad de mantener en el terreno unas determinadas pendientes. Unas veces le surge durante la excavación del terreno natural; trincheras para una carretera, un canal o un ferrocarril, explotación de una mina a cielo abierto, excavación de los sótanos o de los cimientos de un edificio, dragado de un puerto para conseguir el calado deseado ante un muelle; pero también puede presentarse en terrenos artificiales, creados por él: terraplenes de carreteras, escombreras o depósitos de minerales, o la ejecución de una presa de embalse con materiales sueltos.

El aspecto principal, y tal vez obsesivo, de dicho problema, suele ser el de la estabilidad de la pendiente o talud resultantes. La Mecánica de Suelos ha atacado con frecuencia sus problemas desde el punto de vista de la seguridad a la rotura, tanto en el caso de hundimiento de una zapata o un pilote, o de vuelco de un muro, o en el aquí tratado de corrimiento de un talud. Para ello considera el estado de equilibrio límite o de colapso de la estructura del suelo, suponiendo que se ha llegado a la plastificación del mismo en toda su masa, o en una parte de ella (línea de deslizamiento), que tenga extensión suficiente para permitir corrimientos indefinidos de una porción o cuña de terreno. De este modo se puede definir un coeficiente de seguridad, que indica lo alejado que se esté de dicho fenómeno de colapso, que privaría a la obra de su estabilidad o funcionalidad.

Sin embargo al ingeniero también le interesa conocer el estado de deformación del terreno, que es un aspecto muchas veces tan importante

como el anterior de la seguridad a la rotura. Un problema típico es el del asiento de una zapata o un pilote, que sin la rotura del terreno puede provocar el fallo de la estructura sustentada, o al menos la pérdida de su utilidad como es el caso de una estación de radar. Incluso en ocasiones el estado deformacional del suelo es lo determinante y esencial del problema planteado, como ocurre en el dimensionamiento de las armaduras de una losa de cimentación flexible o en la comprobación a flexión de una tablestaca, para lo que hace falta igualar los corrimientos de estructura y terreno. Dentro del tema aquí tratado, los taludes, se presentan dos casos de interés: Uno es el de una excavación próxima a un edificio, con peligro de agrietamiento de éste por los asientos que en él se provocan, que es un caso que cada vez se presenta con mayor frecuencia en las ciudades, y con mayor gravedad por alcanzarse mayores profundidades. El otro es el de las presas de materiales sueltos, cuya deformación interesa conocer para prevenir su posible agrietamiento, así como para controlarla y vigilarla, comprobando la concordancia de los corrimientos reales con los previstos y calculados en el proyecto, lo que tal vez permita advertir ciertos peligros y corregir a tiempo defectos existentes.

Cada vez se muestra y reconoce más interés por la necesidad de mejorar y profundizar los estudios referentes a las deformaciones. Recientemente Roscoe (Ref. A-33) recalcoó en su Lectura de Rankine la capital importancia que tienen en la Mecánica de Suelos los desplazamientos. Así como la evaluación del coeficiente de seguridad es un problema vencido hoy día, y del que cabe esperar en el futuro muy pocos progresos (cálculo en tres dimensiones, por ejemplo Ref. 2) debido a las intensas energías que se volcaron sobre él, que llegaron cerca del límite

de las posibilidades, en cambio el problema de la evaluación de las deformaciones está mucho más retrasado, en parte debido a su mayor complejidad. Está bastante generalizado el cálculo de las deformaciones - aplicando las teorías de la elasticidad, según el modelo de Boussinesq más o menos sofisticado, pero ello es bastante inexacto debido a la rápida aparición de zonas plásticas que aumentan grandemente los corrimientos, como posteriormente se indica.

Ambos problemas, el estado deformacional del suelo y su estado tensional, -sea límite o no- son en realidad dos aspectos de un mismo fenómeno, que es la forma de reaccionar del terreno ante unas fuerzas exteriores, adquiriendo un estado capaz de equilibrarlas. La dificultad y complejidad que presenta el fenómeno, ha hecho que hasta hace poco no se le atacase de un modo directo, y sólo se estudiasen en primera aproximación los dos aspectos más interesantes antedichos.

El problema matemático es el de un sólido no homogéneo, en que coexisten zonas elásticas, regidas por un sistema de ecuaciones diferenciales elípticas, y otras plásticas, regidas por otras ecuaciones diferenciales hiperbólicas (también elípticas si el sólido es elastoplástico), con el agravante de no conocerse el contorno que las separa. La única forma práctica de abordar el problema es por métodos numéricos (apartado 4.), y es este el camino emprendido con resultados inicialmente satisfactorios. La forma de abordar el problema planteado debe ser ésta, puesto que sólo así se consigue la pintura más exacta posible del comportamiento real del terreno, obteniéndose a la vez sus desplazamientos, la repartición de tensiones, el contorno de las zonas plastificadas, e incluso el coeficiente de seguridad, proporcionando una - buena ayuda para el dimensionamiento de las obras, y orientando sobre

donde se aprovecha mejor o peor el material.

Simultáneamente al desarrollo y mejora del método numérico de resolución del difícil problema matemático planteado, se han perfeccionado los ensayos de laboratorio o "in situ" necesarios para determinar las constantes que caracterizan cada suelo, y también se ha profundizado en el campo de las teorías plásticas. Resueltas de un modo casi absoluto las dificultades numéricas, gracias al desarrollo de los ordenadores electrónicos y del cálculo matricial, queda hoy como campo de batalla principal el estudio de la plasticidad, lo cual presenta grandes dificultades al tratar de suelos; La mejora teórica de las relaciones incrementales tensión-deformación, y su comprobación experimental, es lo que permitirá acomodar el aparato matemático a la realidad, aproximándola y reproduciéndola cada vez mejor mediante modelos ideales de terreno.

En la presente tesis se dedican, con cierta extensión y profundidad, dos apéndices a sendos problemas básicos del método elastoplástico o de plasticidad contenida. En el apéndice A se estudia la plasticidad teórica y su desarrollo reciente en lo relativo a suelos, y en el apéndice B se trata del procedimiento general de cálculo de los elementos finitos.

3.- MÉTODOS DE CÁLCULO USUALES

3.1. Método elástico

Se considera el suelo como un material elástico lineal perfecto o hookiano. Primero se arranca de un semiespacio homogéneo de Boussinesq, que luego se ha perfeccionado y complicado de muy diversas maneras: Se ha resuelto el problema del semiespacio no homogéneo cuyo módulo de elasticidad varia con la profundidad según diferentes leyes (Frölich), los casos de un estrato elástico de espesor constante sobre una base rígida, o de doble estrato sobre base rígida (Burminster) o sobre un semiespacio, el de un estrato duro sobre un semiespacio elástico, así como el de infinitas capas delgadas flexibles e inextensibles (Westergaard), y los de suelos con anisotropía transversal tanto llenando un semiespacio homogéneo (Koning) como ocupando un estrato de espesor constante sobre base rígida.

Refiriéndonos al tema de taludes, está resuelto en dos dimensiones: el caso de una cuña elástica indefinida (Levy, Ref. 27, págs. 187 y 203) sometida a diversas fuerzas, y también el de un suelo de Boussinesq sometido a una carga triangular flexible (cimiento de una presa de materiales sueltos). El problema más real del conjunto presa-cimiento está resuelto analíticamente de un modo aproximado (Brahtz, Ref. 22, pág. 210) y también por diferencias finitas o fotoelásticamente.

Merece la pena citar los trabajos de Brown y King (Ref. 4) en que estudian la diferencia entre un talud generado por relleno o por excavación, los de Idriss y Seed (Ref. B-30), Chopra (Ref. 5) y Dibiiej y Penzier (Ref. 7) que estudian el caso de un talud sometido al esfuerzo dinámico de un terremoto, al igual que Finn (Ref. B-31) que además tiene en cuenta las posibles tensiones iniciales.

El método elástico tiene la ventaja de dar una pintura completa del fenómeno, indicándonos la forma de trabajar del material, pero de un modo muy grosero, pues las zonas plásticas modifican sustancialmente la solución, tanto en lo referente a corrimientos, mucho mayores en dichas áreas, como en las tensiones que sufren reajustes importantes. El cálculo elástico, válido para materiales más resistentes como el hormigón o el acero, debe proscribirse al tratarse de suelos, por los grandes errores que trae consigo al no cumplirse las hipótesis de la elasticidad lineal.

Mejor pintura se consigue con la elasticidad no lineal (Girijavallabhan, Ref. B-22; Clough y Woodward, Ref. 6 ; Hayashi, Ref. 14; Duncan, Ref. 8) que suele aplicarse con leyes tensión deformación semiempíricas, dando resultados bastante concordantes con la realidad y por ello aparentemente satisfactorios. Sin embargo, Scott (Ref. A-35 pág.13) critica duramente estos procedimientos por carecer de jus

tificación teórica, porque esas leyes empíricas que se obtienen en estados particulares de tensiones no tienen por qué ser válidas para estados más generales, e incluso las relaciones tensión deformación no son invertibles, y por último carecen de potencial elástico o si lo poseen no es ta claro que sea definido positivo. Si bien puede trabajar se dentro de esta línea para fines o estudios concretos - por su sencillez, no es deseable su empleo en la investigación, ya que conducirían a un estancamiento del progreso.

3.2. Método del estado límite o de equilibrio plástico

Se supone que el suelo ha alcanzado totalmente el esta do plástico, sin preocuparse de como se llegó al mismo. No se evalúan las deformaciones habidas, que quedan indeterminadas, pues se desprecian los corrimientos elásticos considerando el sólido como plástico rígido.

3.2.1. Procedimientos de tanteo

Son los más extendidos. Presuponen una superficie de deslizamiento y evalúan el coeficiente de seguridad de que se dispone frente a la rotura; tanteando con numerosas superficies diferentes se escoge como más probable de producirse aquella que de el coefi-

ciente de seguridad mínimo.

De este modo operan los métodos del círculo sueco (1.912) y del círculo de rozamiento, el de Coulomb para el cálculo del empuje sobre un muro, y los de división en fajas en todas sus modalidades: el de Fellenius, con la simplificación de May de despreciar la interacción entre fajas, salvada posteriormente - por Bishop (1.952), los de Nonveiller y Jambu para superficies deslizantes de cualquier forma, y el - más complejo y perfecto de Morgenstern y Price (1.965). (Véanse los trabajos de Escario, Ref. 11 y Whitman y Bailey, Ref. 32).

Este procedimiento, que está basado en los dos teoremas límites de Drucker, Greenberg y Prager es sólo comprobatorio, y no ayuda al ingeniero a mejorar el diseño y la forma de su obra; sólo sirve para obtener el coeficiente de seguridad del talud, que desde luego suele ser el dato fundamental, pero lo proporciona aislado, sin señalar la forma de trabajar - del terreno. Cuando se emplea el método de las fajas, sólo puede deducirse la ley de tensiones a lo largo de la línea de deslizamiento, y sus resultados difieren bastante entre sí según cual método particular se emplee, y también con los del procedimiento más riguroso de Sokolowsky, según ha comprobado Uriel (Ref. 29), hecho que era de esperar por la superabun

dancia de ecuaciones respecto de incógnitas existentes, ($6n - 1$ contra $6n - 2$ según Suklje, Ref. A-42 pág. 413).

El procedimiento, según lo dicho anteriormente, es un tanto burdo y, como indica Jimenez Salas (Ref. 16) ha estancado y dificultado el progreso en el diseño de presas de materiales sueltos. Por otro lado es teóricamente un método peligroso, pues el tanteo de numerosas superficies no siempre garantiza la obtención del verdadero coeficiente de seguridad; éste se conocerá con precisión suficiente si se comprueban superficies adecuadas pero se está del lado de la inseguridad si no se obra así. Es conocido el caso de presas de escollera con núcleo de arcilla delgado, cuya estabilidad se comprobaba antiguamente tanteando superficies cóncavas hacia arriba, hasta que Samsioe probó su convexidad.

3.2.2. Procedimientos analíticos

Los métodos analíticos constituyen una notable mejora, pues parten de la ecuación diferencial de equilibrio de Kötter, o de la ecuación diferencial de la línea de deslizamiento de Resal, y son por tanto más perfectos y elegantes al no requerir efectuar numerosos tanteos. Además no sólo definen la línea o líneas de deslizamiento, sino que también dan el campo de -

tensiones, indicando el mejor o peor aprovechamiento del material.

Algunos de ellos constituyen más bien una especulación matemática que no una teoría utilizable en la práctica; la línea cicloidal de deslizamiento de un talud plano puramente cohesivo, y la línea recta de deslizamiento de un talud ortolístico, deducidas ambas por Frontard, tienen un valor casi exclusivamente teórico. Por el contrario el estado plástico de Rankine resulta muy interesante y de hecho se utiliza con frecuencia.

La teoría de las características de Sokolowsky - (Ref. 26) y su obtención de los taludes isóresistentes, utilizada y desarrollada en España por Uriel - (Refs. 29 y 30) y aplicada a la simetría radial por Jenike y Yan (Rf.15), constituye un gran progreso y refinamiento, ya que sirve para diseñar los taludes según un criterio de estricta economía y de máximo aprovechamiento del material.

El procedimiento tiene dos aspectos criticables. Por un lado se apoya en la existencia de ciertos puntos singulares (vértice de coronación del talud, del que parte un haz de líneas características), cuya realidad no es segura, y que incluso parece comprobada experimentalmente su no existencia en determinados casos (un muro rígido sometido a empuje pasivo girando sobre su punto más alto, por ejemplo).

En segundo lugar al considerarse el suelo como plástico rígido las deformaciones quedan indeterminadas, y no puede obligarse a que se cumplan ni las condiciones de contorno relativas a corrimientos, ni la compatibilidad de deformaciones, y sólo se respetarán las condiciones de equilibrio; por este motivo la solución obtenida se alejará de la real en numerosos casos. Es típico el caso del terreno sostenido por un muro, cuyo estado tensional y sus líneas de deslizamiento dependerán de la forma de moverse de éste, y serán diferentes si gira respecto al punto inferior o al superior, o si simplemente se traslada; pues bien, al diferenciarse los casos anteriores sólo por condiciones de desplazamiento, el método de las características no puede distinguirlos y da para todos ellos la misma solución de cuña deslizante, compuesta por un área triangular en estado de Rankine y otra de Prandtl de líneas de deslizamientos espirales logarítmicos, y con ley de tensiones lineal con la profundidad, cuando la realidad es muy distinta (Ref. A-33).

En el caso del talud las condiciones impuestas no son de deformación, como en el problema del muro, sino de tensión (fuerzas de masa del peso propio) y por ello la validez del método es mayor. Sin embargo existen muchas dudas respecto de la bondad de los taludes isorresistentes, ya que la forma y la rotura

de éstos, según la teoría plástico rígida, no dependería de lo que ocurriera alrededor de la cuña desli-
zante, pues en los problemas plásticos regidos por una ecuación diferencial hiperbólica cualquier causa afecta sólo a una zona limitada, contrariamente a lo que ocurre en las ecuaciones elípticas de los proble-
mas elásticos, en que cualquier perturbación se propaga diluyéndose hasta el infinito. En la realidad existe una superficie de terreno más o menos horizon-
tal que limita al talud en su parte inferior, apareciendo un punto cóncavo singular en que se concentran las tensiones y que plastifica antes que el resto del material del talud, perdiendo así éste su carácter - de isorresistencia (plastificación simultánea en todos los puntos). Uno de los objetivos de esta tesis es comprobar hasta que punto influyen en el carácter de isorresistencia las condiciones de contorno y la compatibilidad de deformaciones (apartado 5.4.), pa-
ra confirmar la bondad de la forma del talud, inten-
tando impulsar y vigorizar así una teoría tan prome-
tedora.

Recientemente Serrano (Ref. A-36) ha perfeccionado el método de las características, al tener en cuen-
ta la compatibilidad de deformaciones, subsanando el segundo de los puntos de crítica anteriores. Para - ello calcula simultáneamente el campo de tensiones y el campo de velocidades en un material con rozamien-

to " ϕ " y dilatación " v " variables; emplea un procedimiento iterativo en que primeramente se obtiene un campo de velocidades con sus líneas características y que cumple la compatibilidad de deformaciones, a partir de él obtiene el campo de tensiones también con sus líneas características, que cumple las condiciones de equilibrio modificando convenientemente " ϕ " en cada punto, según cierta ley de rigidización, y debido a que el primer campo ya no resulta compatible con el segundo debe ser modificado también, ajustándole los valores de la dilatación " v ", y así sucesivamente hasta que ambos campos son compatibles.

4.- METODO TENSODEFORMACIONAL ELASTOPLASTICO

4.1. Presentación

El procedimiento de cálculo numérico empleado asimila en cada instante el problema al de un sólido elástico ficticio no homogéneo, cuyas características reológicas van variando durante el proceso de carga, de acuerdo con las leyes de la plasticidad. Se arranca por tanto de un terreno elástico lineal al cual se aplica una carga tal que inicie la plastificación en un sólo punto o elemento del sólido, entonces se modifican las características tensodeformacionales de esa zona, y el terreno se comportará ante nuevas cargas como otro ficticio con una falta de homogeneidad en ese punto plastificado, que será más deformable y además anisótropo. Ante un nuevo incremento de carga la zona plastificada tendría en principio corrimientos indeterminados (si se tratase de un cuerpo elastoplástico perfecto, no rigidizable), pero debido al contorno elástico que la rodea dicho corrimiento queda limitado y definido univocamente, motivo por lo que se denomina zona en "fluxión - plástica contenida". Esta zona se deforma casi libremente sin absorber nuevas cargas, por lo que las áreas contiguas se sobrecargan y son arrastradas rapidamente al estado plástico, teniéndose que modificar nuevamente las características tensodeformacionales de las partes plastificadas tras cada nuevo incremento de carga. El procedimiento se continua hasta alcanzarse la carga total, o una zona plástica -

tan extensa que deje de estar contenida (superficie de deslizamiento completa) produciéndose a partir de ese momento corrimientos indefinidos (colapso total en sólidos plásticos perfectos) o que crecen muy rápidamente (sólido rigidizable).

Con este método se sustituye en cada punto del terreno la ley de tensión deformación curvilínea teórica por una poligonal (Fig. B-14a , pág. B-52), correspondiendo cada segmento de la poligonal a un incremento de carga, durante el cual cada zona de terreno se comporta como elástica lineal anisótropa. Se reproduce por tanto con bastante fidelidad el fenómeno real, tanto mejor si son menores los incrementos de carga aplicados y si la teoría plástica matemática utilizada se adapta más a los suelos de la naturaleza.

El fenómeno de la plasticidad contenida y progresiva influye de un modo determinante, a veces sorprendente, en la redistribución de tensiones y más aún en las deformaciones.

El equilibrio alcanzado en cada instante depende de las cargas aplicadas y de los corrimientos habidos, pero también de la historia anterior. Según recalca Hill (Ref.A-16, pág. 238) es fundamental el proceso de carga o de relleno del talud, o de su excavación, pues según se proceda de una u otra forma se podrían variar totalmente los estados intermedios anteriores a la rotura total. En cambio intuitivamente se ve que, en general, la carga final, en el equi

librio límite, variará poco de un proceso a otro, y quedará aproximadamente definida por procedimientos de cálculo más rústicos, según los teoremas límites de Drucker.

Este método elastoplástico es por tanto el más exacto, y puede dar una pintura verdadera y completa del fenómeno real, obteniéndose con precisión los corrimientos tan difíciles de evaluar por otros procedimientos —al menos con la exactitud con que se midan las características del material, sin introducir nuevos errores debidos al método de cálculo—, así como las tensiones e incluso el coeficiente de seguridad, ayudando a conocer mejor y de un modo más completo la estructura, y a perfeccionar su diseño. Respecto al coeficiente de seguridad debe hacerse notar que se obtiene el verdadero, sin el peligro existente en los métodos de tanteo de probar superficies de forma errónea, dependiendo las precisiones obtenidas en él y en la ubicación de la línea de rotura de los intervalos de carga y de la fírmura de la malla que se empleen.

El procedimiento numérico expuesto trae consigo otras ventajas de tipo práctico, como son la posibilidad de estudiar sin nuevas complicaciones terrenos no homogéneos, fisurados, con tensiones residuales, etc.

El cálculo es laborioso, y por ello caro, resultando imprescindible el uso del ordenador electrónico. La tendencia inicial es utilizarlo en el campo de la investigación, para avanzar en el conocimiento sobre el comportamiento del

suelo, y también para contrastar y dar por válidas o no teorías de cálculo más sencillas y rápidas. Dentro de estas ideas en la presente tesis se pretende comprobar la influencia de la dilatación en el comportamiento de los taludes, y de contrastar la bondad de la forma de los taludes isorresistentes, con el deseo de disipar los temores o dudas que puedan existir sobre ellos para así facilitar su utilización en la vida práctica. Sin embargo, hoy ya se llega más lejos y se comienza a utilizar el método en ciertos proyectos, en los que la importancia de la economía o la seguridad justifican estudios más prolijos, tales como son el caso de presas de embalse (Clough, Ref.6), grandes túneles (Hayashi, Ref.14), etc.

4.2. Trabajos previos

Entre los primeros trabajos realizados aplicando el método elastoplástico está el de Allen y Southwell (Ref.1), que obtuvieron ya ciertos resultados prácticos, aunque su utilidad en suelos es parcial por tratar sólidos con sólo cohesión, y además ha sido criticado por Jurisic (Ref. 17) por no tener en cuenta las condiciones de compatibilidad de deformaciones en la región plástica.

Posteriormente Ang y Harper, ponen a punto un procedimiento bastante ingenioso (Ref. 3), en que descomponen el

continuo en una serie de puntos de masa y puntos de fuerza. Lorente de No lo ha utilizado en dos de las pocas aplicaciones de la elastoplasticidad a los taludes (Ref. 18), en una de ellas extendiendo el procedimiento a coordenadas cilíndricas (Ref. 20), y también lo ha generalizado a suelos con rozamiento (Ref. 19); Christian lo aplica al estudio de suelos saturados incompresibles (Ref. B-18), Fort introduce el fenómeno de la viscosidad (Ref. 12) y Luning los efectos dinámicos (Ref. 21). El defecto primordial del método radica en la rigidez de formas exigidas por una malla de cuadrados, que lo hace poco práctico para el estudio de taludes.

El método de los elementos finitos es el que permitirá de un modo más cómodo el tratar el problema de los taludes, pues con la malla de triángulos es fácil adaptarse a cualquier contorno. Inicialmente creado para sólidos elásticos lineales, se ha generalizado fácilmente para tratar problemas no lineales, mediante técnicas iterativas (ver Zienkiewicz, Ref. B-52, capítulo 12), hasta el extremo que Oden (Ref. B-37) cita alrededor de 200 aplicaciones. En su mayoría los progresos realizados se refieren a grandes deformaciones, problemas dinámicos, elasticidad no lineal, sólidos que no resisten a tracción, etc., y las aplicaciones versan insistentemente sobre el caso de la zapata, tuneles, etc., y en una minoría de ocasiones sobre taludes. En pocos casos se trata el problema elastoplástico, y de entre ellos en una minoría se conserva cierto rigor en la elec

ción del criterio de rotura, de las relaciones tensión de formación, y del procedimiento iterativo, siendo muy criticables y de validez dudosa las conclusiones derivadas de numerosos artículos publicados. Sobre este punto se realizan diversos comentarios en los apartados 3.1. y B-5.

Dada la complejidad y dificultad del problema de la plasticidad contenida, merece la pena citar como autores de aplicaciones rigurosas a Marcal y King (Ref. B-33), Pope (Ref. B-39), Watt (Ref. 31) y en especial a Reyes y Deere (Ref. B-41) que dentro de cada incremento de carga realiza una doble iteración para corregir errores de segundo orden.

4.3. Variables fundamentales escogidas en el procedimiento de cálculo

Los puntos clave del método tensodeformacional elástico plástico, que más pueden falsear los resultados y que son los que presentan mayores dificultades, sobre los cuales se ha realizado un mayor esfuerzo al desarrollar la presente tesis, son los siguientes:

Discretización del continuo. Se ha escogido el método de los elementos finitos (apéndice B). La convergencia y unicidad de la solución obtenida, estudiada rigurosamente

por De Arantes (Ref. B-6), se cumple por tratarse de un caso particular del método de Ritz (apartado B-3).

El método de los elementos finitos permite representar correctamente la superficie exterior del talud, mediante la utilización de una malla de elementos triangulares. En el apartado 5.2.1. se comprueba que los límites laterales de la porción de suelo reproducida están suficientemente alejados, y que es aceptable la graduación del tamaño de la malla, con elementos más pequeños en el pie del talud, ahí donde las tensiones se concentran y varían más rápidamente. El programa de cálculo electrónico incluye el cálculo de todos los residuos del sistema de ecuaciones lineales correspondientes a cada incremento de carga, y se ha comprobado que el error numérico de la resolución del sistema respeta siempre 5 cifras significativas en los corrimientos.

Teoría plástica. Este es probablemente el tema crucial, pues en la mayoría de las aplicaciones consultadas se comprueba una falta de rigor y un desconocimiento bastante general de las teorías de plasticidad por parte de sus autores. En esta tesis se utiliza un modelo matemático de suelo isótropo elastoplástico perfecto (elasticidad lineal - hookiana seguida de plasticidad perfecta de deformaciones indeterminadas, Fig. A-16), con cohesión y rozamiento, que plastifica según el criterio de Mohr Coulomb. Las relaciones tensión-deformación se derivan de la función de rotura

mediante la regla de la normalidad, y por lo tanto se supone que aquella coincide con la función potencial plástico; dichas relaciones fueron dadas por Drucker y Prager (Ref. A-7) y generalizadas a cuerpos elastoplásticos por Lorente de No (Ref. 18). La elección de esta teoría se justifica en el apéndice A, por ser una de las que mejor se adaptan al comportamiento de los suelos, y por respetar el uso de los parámetros " ϕ " y " δ ", sumamente extendidos, sirviendo gracias a ello para contrastar métodos de cálculo más sencillos, como son el abaco de Taylor o los taludes isorresistentes (apartados 5.2.2. y 5.4.).

Drucker y Prager demostraron que un suelo que cumpliera su ley debería tener un incremento de volumen relativo proporcional a " $\sin \phi$ "; la mayor discordancia de los suelos reales con este modelo teórico radica en que su dilatación es diferente, y bastante menor, lo cual implica también que la red de líneas características del campo de velocidades no coincide con la del campo de tensiones. Como novedad principal de la presente tesis se encuentra el utilizar también el mismo terreno definido en el párrafo anterior, pero sustituyendo las relaciones tensión deformación de Drucker y Prager por otras que no cumplen la ley de la normalidad, y en cambio respetan una dilatancia prefijada " v ", característica del suelo. Este modelo de terreno elastoplástico, cuyas relaciones incrementales tensión-deformación asimétricas se deducen en el apartado A-5.2,

se aplica aquí por primera vez (al menos dentro del conocimiento del autor), permitiendo estudiar la influencia de la dilatación en la rotura progresiva de un talud (apartado 5. 5.), y abriendo el camino para estudiar con más rigor problemas en que las condiciones de contorno vengan dadas en corrimientos y no en tensiones, -para los cuales no parecen ser válidos modelos de terreno con potencial plástico- como son un pilote o un muro rígido.

Debe reconocerse aquí que este modelo, pese a representar un pequeño progreso, tiene aún la gran limitación de no ser rigidizable al suponer constantes los tres parámetros del suelo.

El último punto clave es el de asegurar que la solución obtenida sea la verdadera. La unicidad de la solución está demostrada para la elasticidad, y también para plasticidad dentro de ciertas limitaciones. Una de las premisas de los teoremas existentes de unicidad en plasticidad es la existencia de potencial plástico, y su coincidencia con la función de rotura, y por ello conviene dejar claro que el último modelo matemático propuesto, de suelo dilatante, es muy criticable por carecer de función potencial.

Ade más de la existencia de la función potencial, que sí se da en el modelo de Drucker y Prager, hay otro factor que influye en la unicidad de la solución, y es la historia del cuerpo. Para obtener la solución verdadera de un problema debe reproducirse fielmente su historia tensional

(Hill, Ref. A-16, pág. 238) y por ende el orden de aplicación de las cargas a que esté sometido.

Entre los métodos iterativos de cálculo plástico, se ha utilizado el incremental de la matriz de rigidez tangente (apartado B-5.2.), que es el único que permite confiar en la obtención de la solución verdadera, pues descompone el cálculo en varios elásticos ficticios sucesivos a fin de reproducir el problema físico real y la historia tensional sufrida.

Además de esto, dada la importancia capital del proceso de carga, se ha hecho un esfuerzo notable para reproducirle, dando bastante flexibilidad en este aspecto al programa de cálculo electrónico.

En teoría si se construye una presa de tierras, el estado tensodeformacional resultante será diferente según en cada tongada se vierta y compacte antes la zona central, la de aguas arriba o la de aguas abajo, y lo mismo ocurre al excavar un talud. En la presente tesis se aplica únicamente la carga total, que se hace aumentar progresivamente de un modo uniforme en todas las partes en que actúe; ello normalmente no representa un proceso de carga real (sólo se asemejaría, en algunos intervalos de carga, al aumento de densidad por humectación de las tierras), pero es el modo más lógico de liberarse del proceso constructivo.

El programa de cálculo electrónico incluye también una

5.- PROBLEMAS PARTICULARES ESTUDIADOS

5.1. Aplicaciones conocidas

La mayoría de los trabajos en elastoplasticidad se han dirigido al estudio de tuneles, zapatas, etc. y sólo una minoría a taludes. De éstos algunos carecen del rigor teórico deseable, no obstante lo cual han proporcionado conclusiones interesantes.

Lorente de No en su tesis (1.966, Ref. 18) estudia por el método de Ang y Harper la plastificación progresiva de un talud, aunque se limita al caso de terreno coherente y talud vertical (Fig. 1). Posteriormente lo extendió al caso de coordenadas cilíndricas (1.969, Ref. 20), y propuso una relación aproximada entre la altura crítica $f = \gamma H/c$ y la curvatura $r = R/H$

$$f = 4 + 2/(3r + 1) \quad \text{para taludes cóncavos}$$

$$f = 4 - 2/(3r - 1) \quad \text{para taludes convexos.}$$

Por cierto que estas leyes son criticables, pues valen para interpolar entre $0,6 < r < 3$ pero no para extrapolar, ya que no verifican los valores teóricos de $r = 0$ que serían $f \rightarrow \infty$ $f = 2$. De las infinitas funciones que pueden proponerse, aunque todas carezcan de rigor, unas que cumplirían los valores antedichos serían por ejemplo:

$$f = 4 + \frac{1}{1,6 r} - \frac{1}{9 r^2} \quad \text{para taludes cóncavos}$$

$$f = 4 - \frac{6 + 2 r}{3 + 5 r^2} \quad \text{para taludes convexos}$$

Clough y Woodward en un artículo muy práctico (1.967, Ref. 6), que por ello puede considerarse clave para la difusión del método como herramienta de proyecto y no sólo de investigación, estudian por elemen

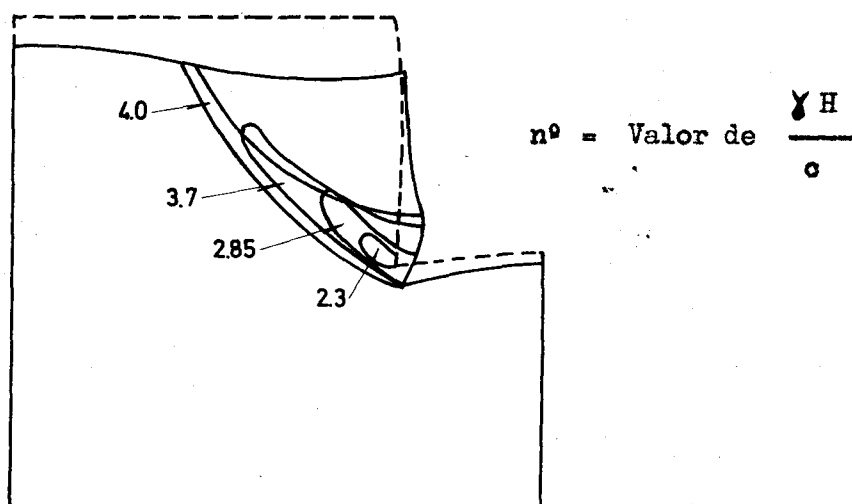


Fig. 1 .- Progresión de zonas plásticas y deformación de un talud vertical coherente (según LORENTE DE NO, 1.966)

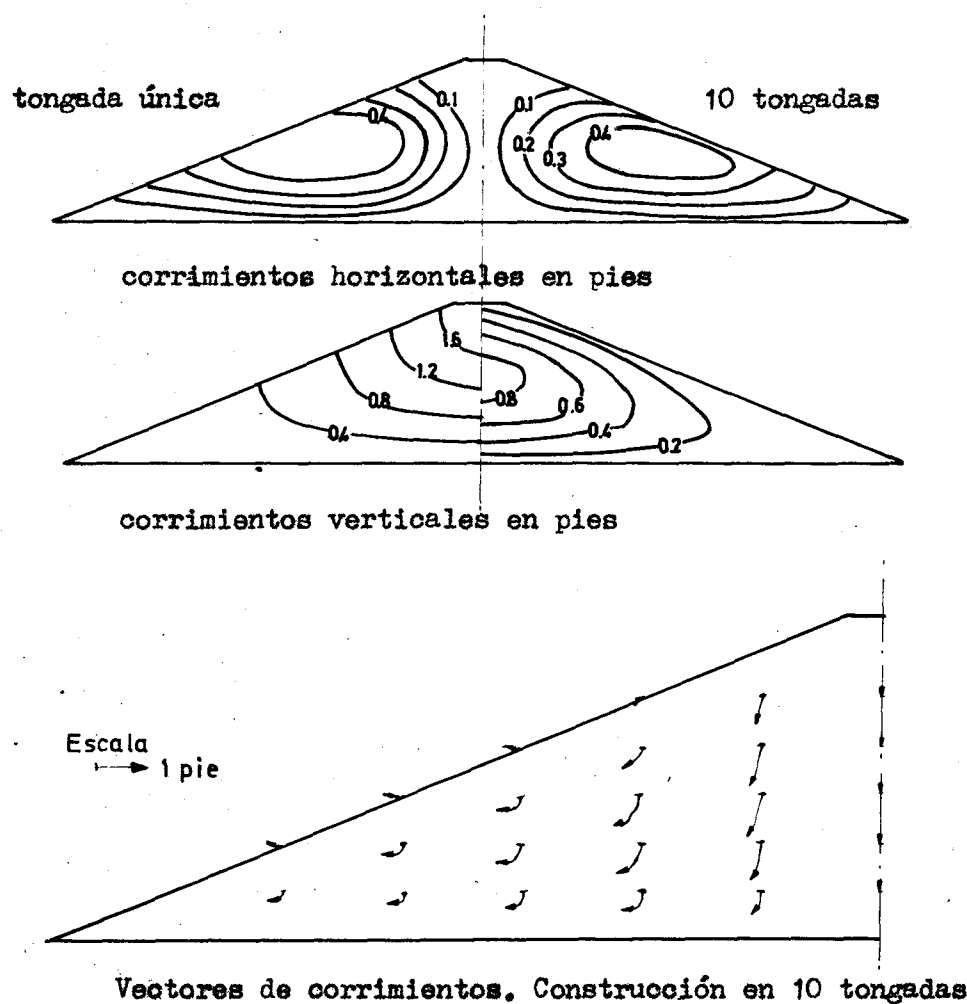


Fig. 2 .- Corrimientos de una presa de tierras debidos al peso propio

ción en diez tongadas sucesivas, y observando entre otras cosas las trayectorias del movimiento que siguen algunos puntos de la presa (Fig. 2), el reparto de tensiones y la influencia de la deformabilidad del cimiento. El cálculo lo hacen primero dentro de la teoría de la elasticidad lineal, y a continuación en elasticidad no lineal, conservando constante el módulo de rigidez del terreno, lo cual intenta reproducir el comportamiento de la arcilla saturada sin drenaje de una forma muy criticable, pero que da una pintura aproximada del fenómeno.

Watt, asesorado por Christian y Lambe (1.968, Ref. 31) estudia por elementos finitos el talud irregular de Atchafalaya (Fig. 3) que sufría grandes deformaciones, en la hipótesis de terreno no drenado. Emplea un modelo de material elastoplástico perfecto, con la teoría incremental rigurosa.

Sus principales conclusiones son que lo que más influye en los grandes corrimientos de la coronación son el módulo de elasticidad y las tensiones iniciales. Debido a lo reducido de la zona plastificada para la carga existente, de la hipótesis de una disminución de la cohesión del terreno resulta un aumento muy pequeño de las deformaciones. También comprueba la poca influencia de la compresibilidad del estrato de arcilla orgánica. La prolongación de la bermá prevista (de puntos en la Fig. 3) es efectiva para reducir los desplazamientos, pero agravan el problema ya que aumenta considerablemente la zona plástica al pie del dique, y por este motivo los movimientos en sus proximidades, empeorando más aún el fenómeno en caso de excavar parte de los materiales de préstamo próximos.

Este trabajo es de destacar por su rigor y por lo in-

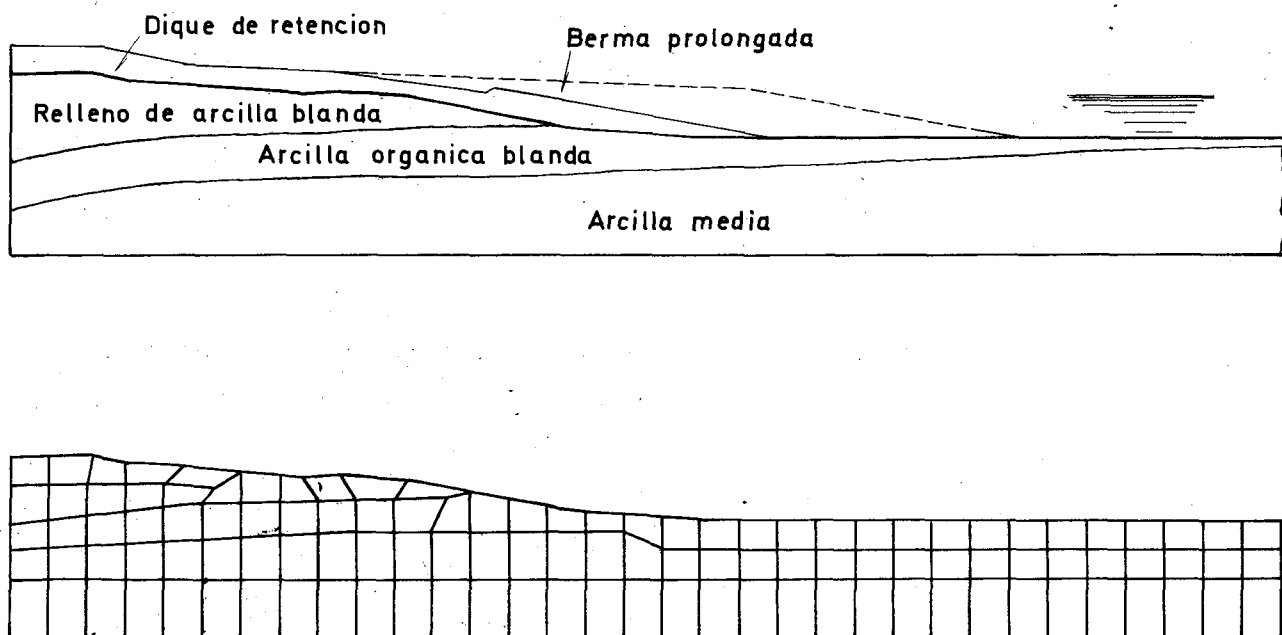
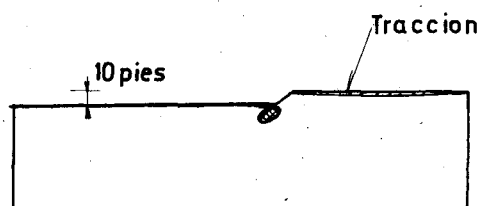
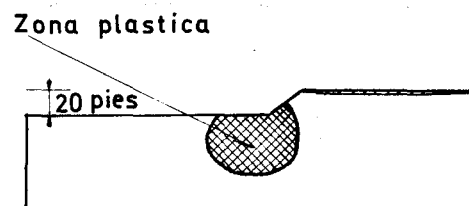


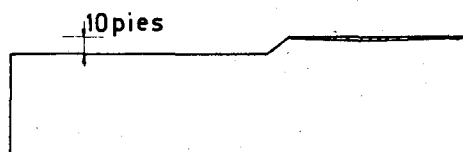
Fig. 3 .- Talud de Atchafalaya y malla empleada (según WATT, 1.968)



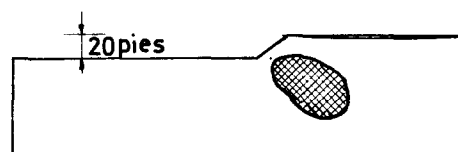
Arcilla normalmente consolidada



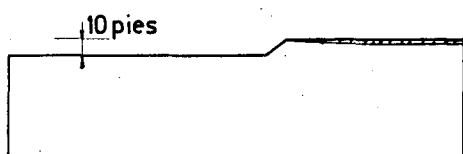
$K = 1,25$ Talud = 1,5 : 1



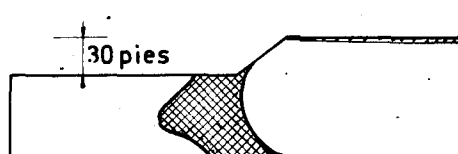
Arcilla normalmente consolidada



$K = 0,75$ Talud = 1,5 : 1



Arcilla preconsolidada



$K = 1,25$ Talud = 1,5 : 1

genioso del método iterativo y de resolución de ecuaciones.

Duncan y Dunlop estudian en elasticidad lineal y por elementos finitos (1.969, Ref. B-19) un talud excavado, observando las diferencias según las tensiones horizontales iniciales sean mayores ($K_0 = 1,6$) o menores ($K_0 = 0,81$) comprobando, como es lógico y de acuerdo con lo afirmado por Bjerrum (1.967), que aparecen mayores tensiones cortantes y deformaciones en el caso de mayor empuje al reposo, que correspondería a arcillas preconsolidadas. Posteriormente, (1.970, Ref. 8) mejoran su estudio inicial, reproduciendo la excavación en ocho escalones, con una ley tensión deformación de tipo elástico bilineal, y en la suposición de materiales puramente coherentes, aunque son criticables la malla de elementos finitos que emplean, y la falta de rigor de las características reológicas del material.

Estudian arcillas con cohesión y módulo de elasticidad en relación constante ($E = 100 \cdot c$), manteniéndose constantes o creciendo ambas con la profundidad. Representan las arcillas normalmente consolidadas con empuje al reposo $K = 0,75$ y con cohesión creciendo linealmente con la profundidad, y las arcillas sobreconsolidadas con $K = 1,25$ y cohesión creciendo de un modo más suave.

Observan el crecimiento de las zonas plásticas al progresar la excavación, y comprueban que los deslizamientos

profundos sólo se dan si la cohesión es constante en toda la altura. En las arcillas preconsolidadas la plastificación comienza al pie del talud y luego progresa hacia el interior; en cambio en las normalmente consolidadas, con menores tensiones horizontales iniciales, el comienzo se da en el interior del suelo (Fig. 4). En algunos casos la zona en estado de rotura tiene cierto parecido con una línea circular, pero al comparar sus resultados con el coeficiente de seguridad obtenido por los métodos clásicos de tanteos, la concordancia no es buena en las arcillas preconsolidadas.

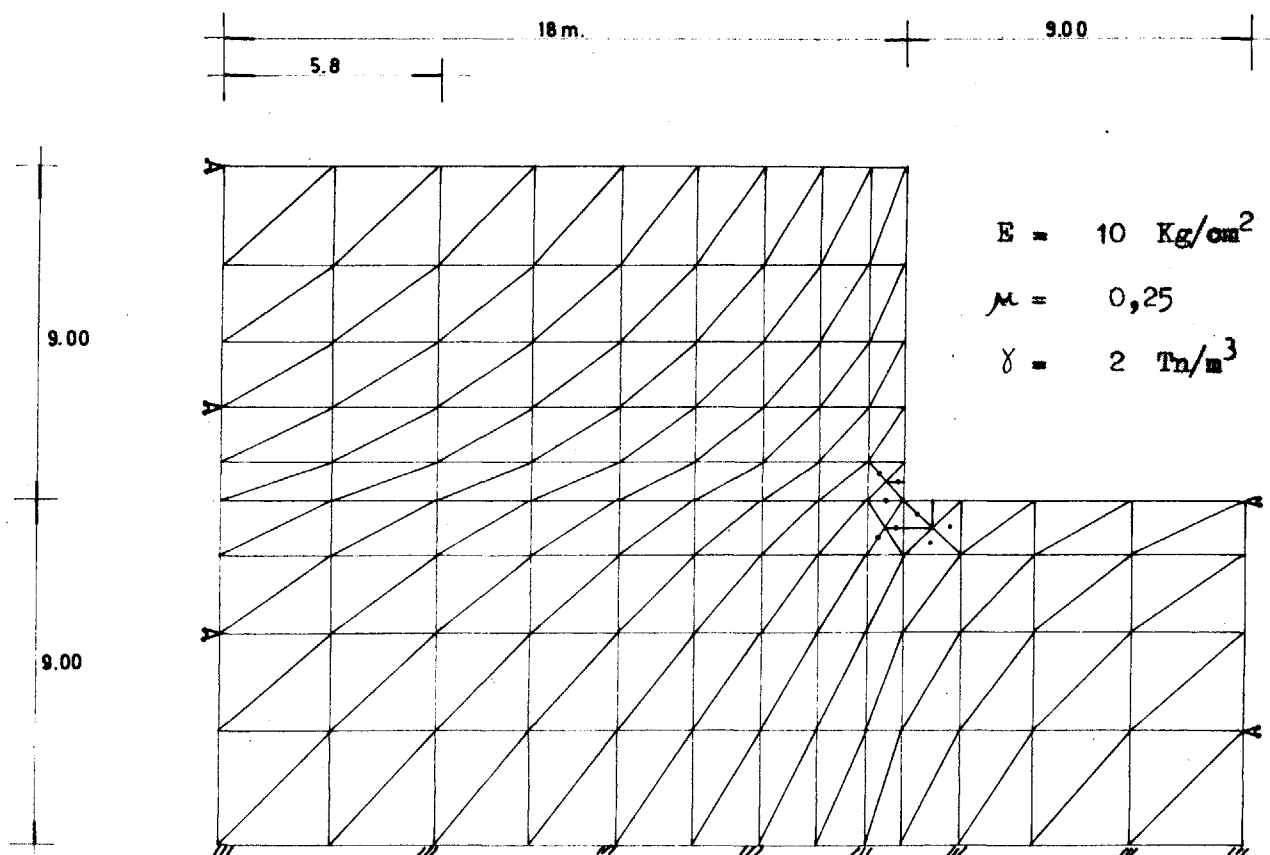
5.2. Talud plano

5.2.1. Estudio de la malla

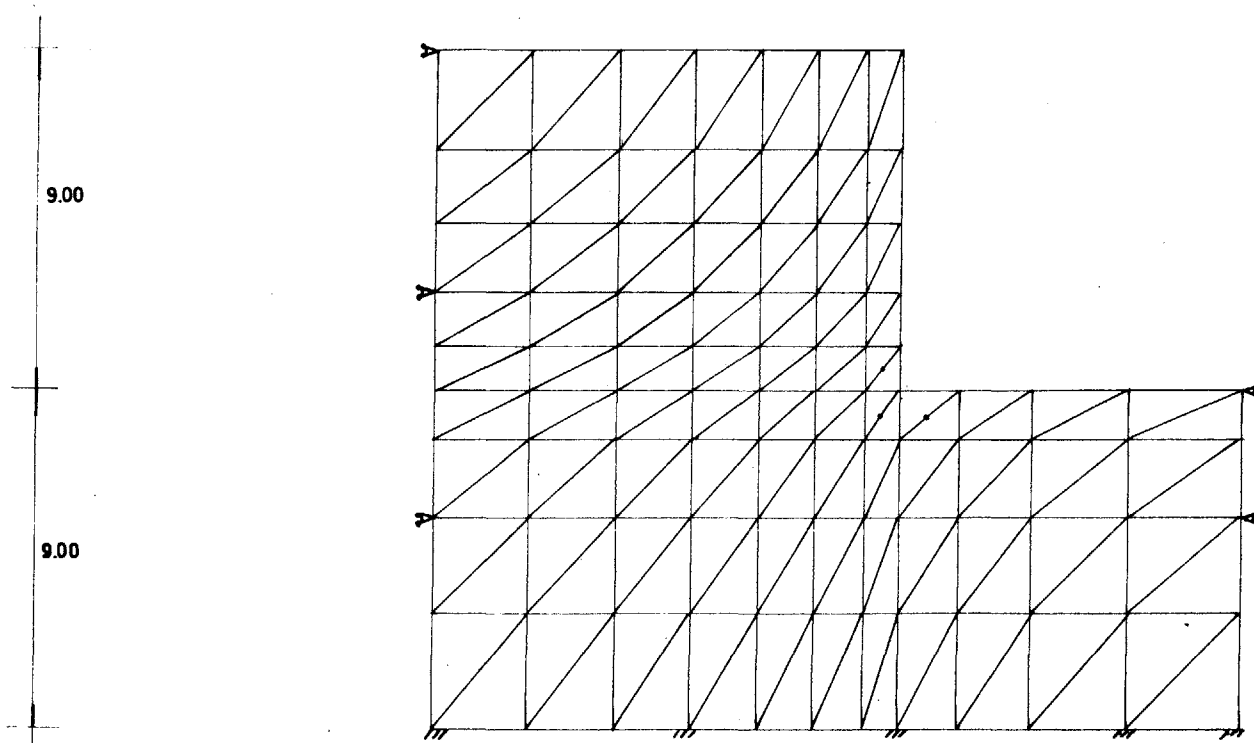
Para comprobar la bondad de la precisión del método de los elementos finitos se resuelve el conocido caso del talud vertical en elasticidad lineal. Para estimar la rapidez de la convergencia es preciso repetir el cálculo con mallas diferentes de una misma serie, es decir, tales que la malla nueva contenga todos los nodos de la anterior, y sus elementos sean subdivisión de los de ésta. En la Fig. 5 se ven las dos mallas estudiadas.

Al estudiar la plastificación progresiva es fundamental determinar la carga en que comienza la rotura, y en que punto ocurre. Dicho punto es el pie del talud, en el cual se produce una concentración de tensiones que conviene obtener con mayor precisión, y para ello se ha disminuido el tamaño de los elementos en esta zona. En la Fig. 7 se han representado los esfuerzos tangenciales que actúan en una línea horizontal, y por las diferencias obtenidas con ambas mallas se comprueba la necesidad de utilizar la más fina.

Las tensiones verticales y horizontales y los corrimientos verticales (Figs. 6 y 7) obtenidos por ambas mallas difieren sólo en menos del 2 %, pero hay unas diferencias apreciables en los corrimientos horizontales y en las tensiones tangenciales, que exigen utilizar la malla más extensa. El estudio de la inclinación de la elipse de tensiones en las tres columnas extremas de elementos permite deducir que la malla -

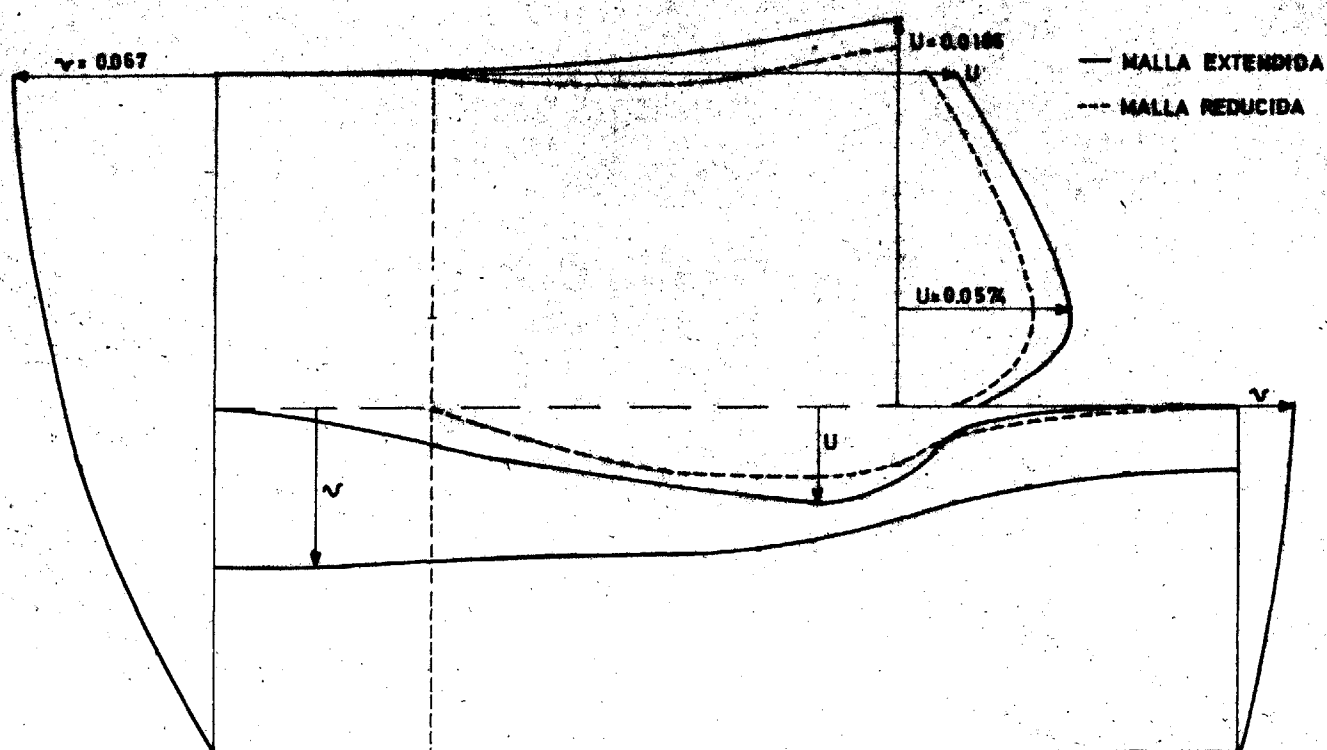


a) 126 nodos, 204 elementos



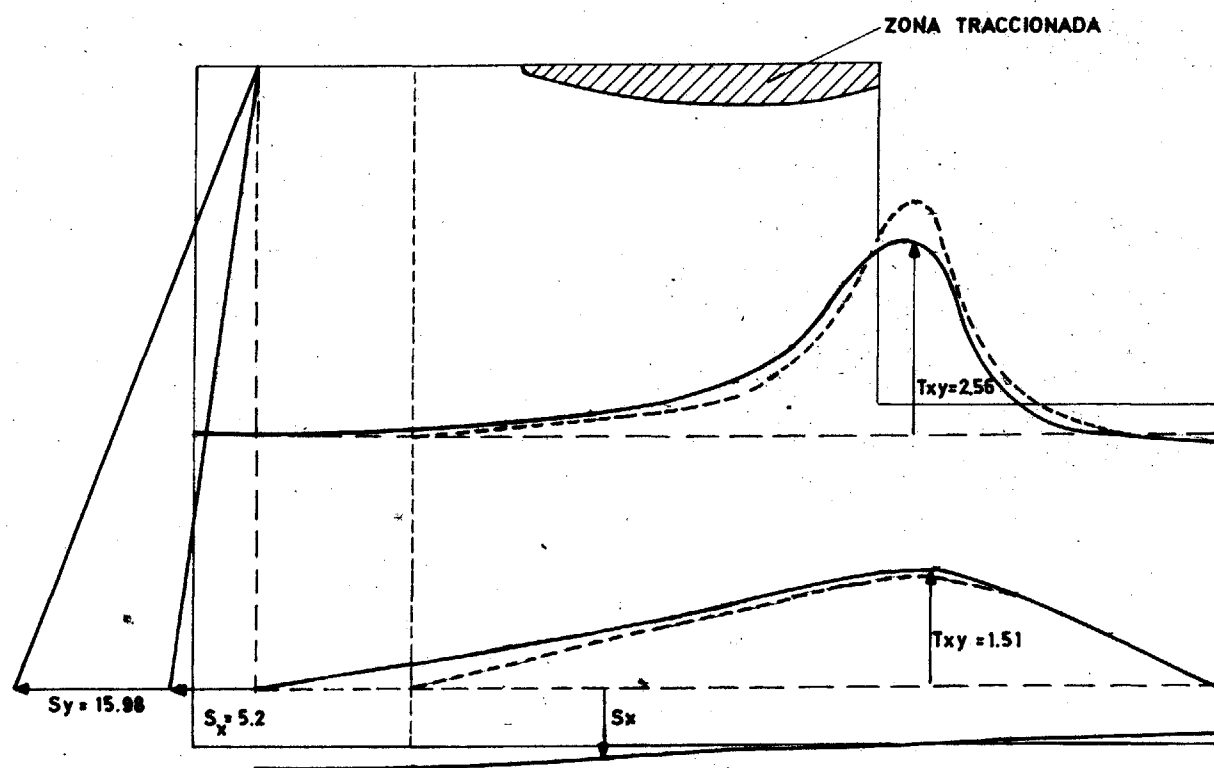
b) 100 nodos, 158 elementos

Fig. 5 .- Comparación de dos mallas de un talud vertical para el estudio de la precisión



U = HORIZONTALES
CORRIMIENTOS: v = VERTICAL
ESCALA 1:2.5

Fig. 6.- Leyes de corrimientos



Sx = VERTICAL
TENSIONES: Sy = HORIZONTAL
Txy = TANGENCIAL
ESCALA 1:5
ESCALA 1:1

Fig. 7.- Leyes de tensiones

más extensa es suficiente y no es preciso alejar el contorno lubricado a una distancia del talud mayor del doble del desnivel de éste.

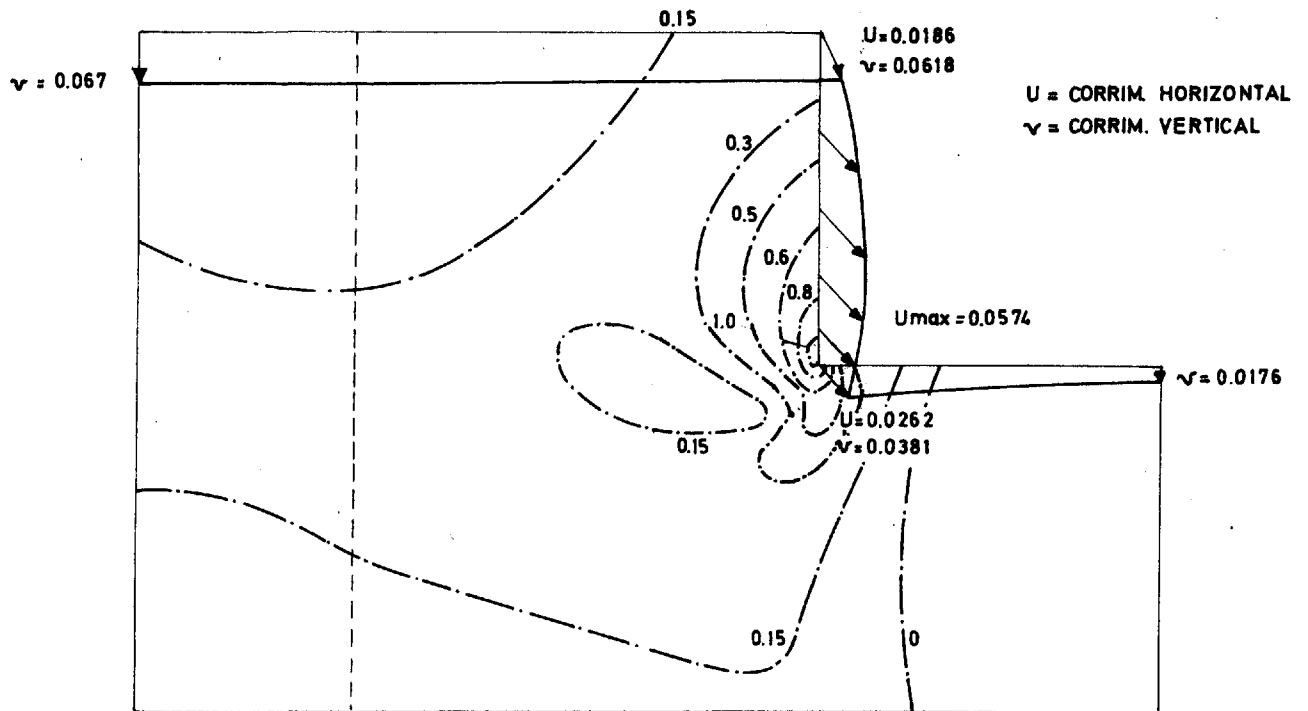
El contorno rígido inferior está demasiado próximo para asemejorar el caso de un semiespacio indefinido, pero en la realidad es frecuente la existencia de un estrato duro a profundidad no muy grande.

Los corrimientos se calculan en los nodos, y las tensiones en el centro de gravedad de cada dos elementos, debiéndose procurar unir éstos por parejas que no tengan una forma irregular ó alargada.

Los resultados obtenidos concuerdan bien con los ya conocidos para un talud vertical (modelo de gelatina de Scheiblauer, fotoelástico y analítico de Richards, etc..). Por ejemplo existe una zona traccionada (Fig. 7) en la superficie de coronación (Ref. 28, pág. 510), el vértice superior desciende menos que el resto de la coronación, la pared vertical adepta forma de panza (Fig. 8), se cierra el ángulo concavo del pie del talud, las isostáticas tienen la forma debida (Fig. 9), etc.

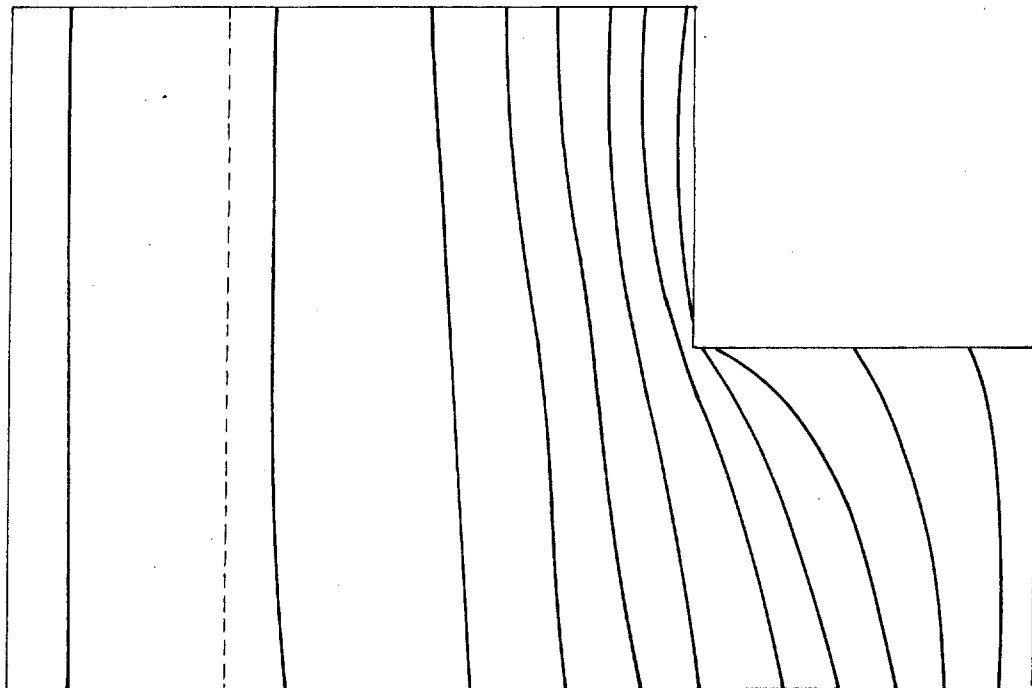
Richards (Ref. 23) señala que "el pie del talud es un punto donde la concentración de tensiones es grande y complicada, con el campo de tensiones a la vez creciente y decreciente en tres direcciones", y efectivamente constituye una dura prueba para el método de los elementos finitos, en el que las tensiones obtenidas tienen mucha menor precisión que los corrimientos, y mediante el cual es imposible representar un punto singular situado en un nodo, ya que las tensiones las obtie

no en los centros de gravedad de los triángulos. Pese a dicha dificultad se ve en el grado de plastificación (Fig. 6) un aumento de cortantes hacia arriba y abajo, y una disminución hacia la izquierda, consiguiéndose una figura cualitativamente mucho más parecida a las isócoras obtenidas fotoelásticamente (Ref. 22), que no las logradas por Duncan y Dunlop (Ref. B-17) que también hicieron sus cálculos en elasticidad con elementos finitos. Esta mejor concordancia con la solución exacta se debe a haber afinado más la malla en la proximidad del vértice, e indica que la precisión es suficientemente buena, aunque no se reproduzca ese punto singular con toda fidelidad.



———→ CORRIMIENTOS
 - - - - - GRADO DE PLASTIFICACION = $\frac{S_1 - S_2 + (S_1 + S_2) \sin \phi}{2 C \cos. \phi}$ $\phi = 30^\circ$
 $c = 2 \text{ Tn./m}^2$

Fig. 8.- Deformada y curvas de plastificación relativa



ISOSTATICAS ———

Fig. 9

5.2.2. Talud coulombiano

Se ha estudiado el caso de un talud plano de 75 grados de pendiente, de 10 m. de altura, y tallado en un material elastoplástico perfecto de ángulo de rozamiento 20° y cohesión 3 tn/m^2 . En la Fig. 10 puede verse la malla empleada. Respecto al caso estudiado por Lorente de No (Ref. 18) se han introducido las mejoras de incluir el rozamiento interno, y de darle la pendiente deseada.

Primeramente se aplica una densidad a todo el terreno tal que comience a plastificar la pareja de elementos triangulares más próxima al vértice del talud, y a continuación se aumenta dicha densidad en sucesivos incrementos de un 10 %, obteniéndose en la Fig. 11 el crecimiento de la zona plastificada.

Según el ábaco de Taylor la rotura se produce con un circulo definido por su semiángulo $\alpha = 22^\circ$ y el ángulo de la cuerda con la horizontal $w = 53^\circ$, y un factor de altura $\gamma H/c = 7,46$, es decir con una densidad de $2,24 \text{ tn/m}^3$.

Los resultados obtenidos indican que se inicia la plastificación con una densidad del 40% de la anterior, valor que debe ser bastante exacto ya que el punto de tensión dista del vértice del talud sólo 30 cm. (un 3 % de la altura). La zona plastificada está muy próxima a la pared del talud, lo cual concuerda con el círculo pésimo de deslizamiento, si bien no ha alcanzado la coronación con la densidad teórica.

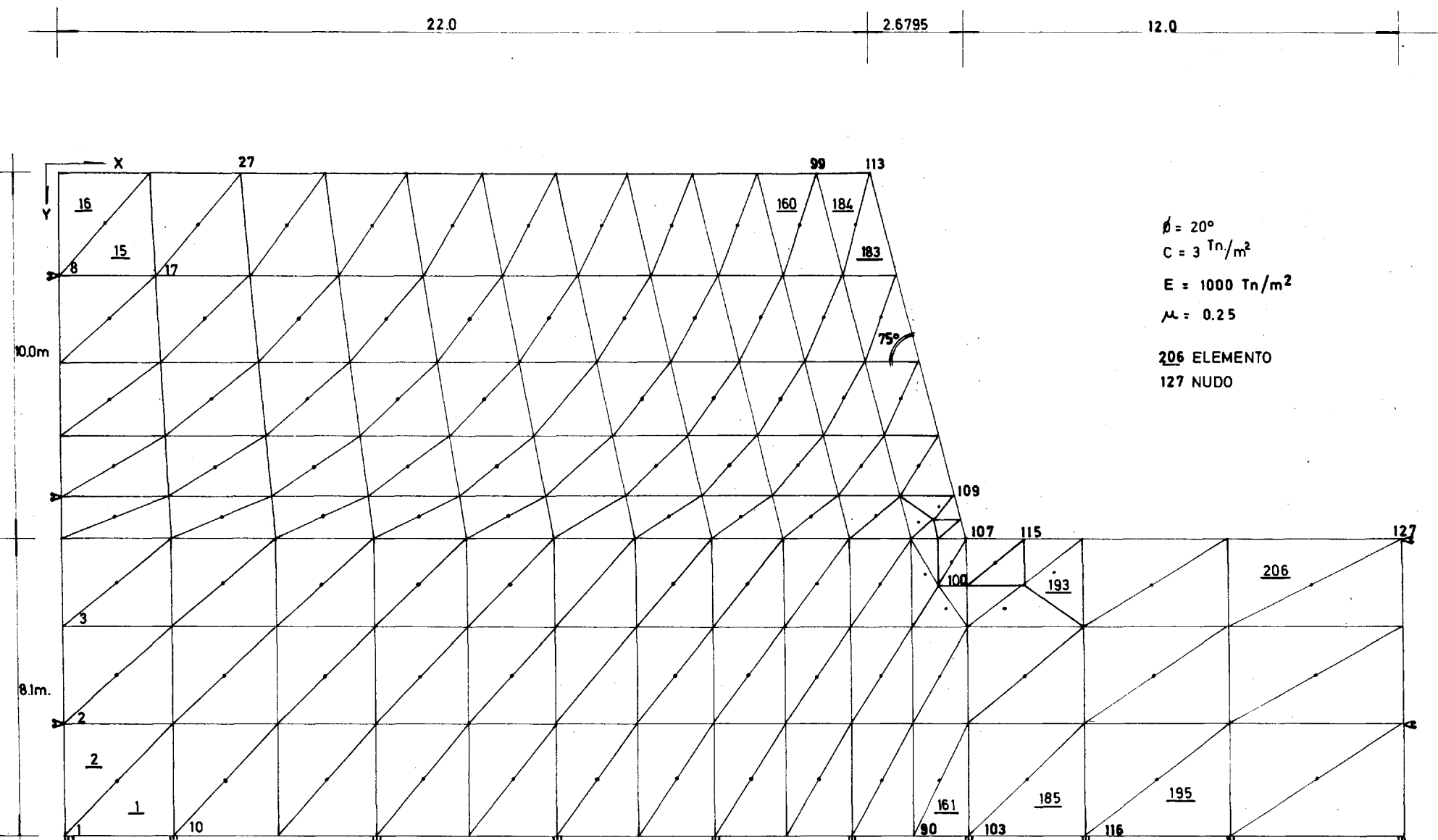


Fig. 10 .- Malla de elementos finitos para talud plano.

Esto último puede deberse en parte a la pobreza de la malla, que en la coronación tiene elementos grandes, y por sustituir la densidad del suelo por fuerzas concentradas en los nodos y calcular las tensiones en el centro de gravedad de cada dos triángulos, de modo que en esta zona alta se reproduce peor el efecto del peso propio. Por otro lado el empuje al reposo supuesto es el de la teoría elástica $K_0 = m / (1-m)$ y por ser el coeficiente de Poisson bajo ($m = 0,25$) resultan unas tensiones horizontales liberadas más bajas de lo ordinario.

El crecimiento de la zona plastificada es lógico, aunque al final se ve que en la zona aún en estado elástico tiende a crecer la plastificación horizontalmente, hacia el interior del terreno (curva de trazos, Fig. 11), lo cual ocurre a causa del bajo valor del empuje al reposo $K_0 = 0,33$. La zona de rotura no llega a separarse sin embargo del frente del talud, como señalaba Lorente de No (Fig.1), precisamente por tener el terreno rozamiento interno, cuyo efecto se sabe es el de modificar los círculos p_simos aproximándolos a la vez a la superficie y al frente del talud.

En la Fig. 12 puede verse la deformada del talud, con la clásica forma de panza debida a la plastificación prematura del pie y de las zonas bajas del mismo. Finalmente en la Fig. 13 se muestran las isostáticas en el instante de la rotura.

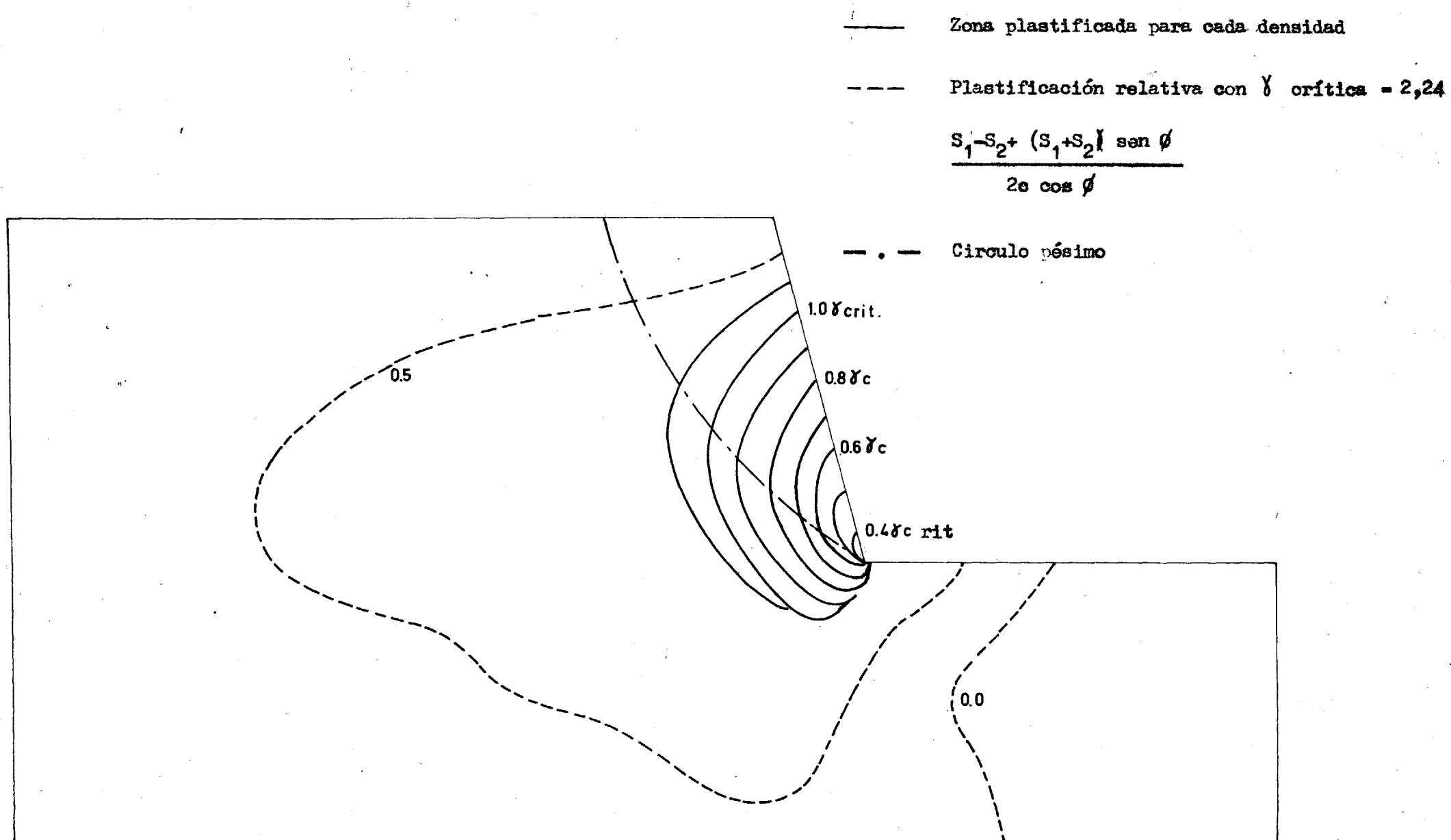


Fig. 11 .- Plastificación progresiva del talud plano.

---- Corrimientos en fase elástica 0,48 orít

— Para densidad crítica = 2,24 tn/m³

u = horizontal v = vertical

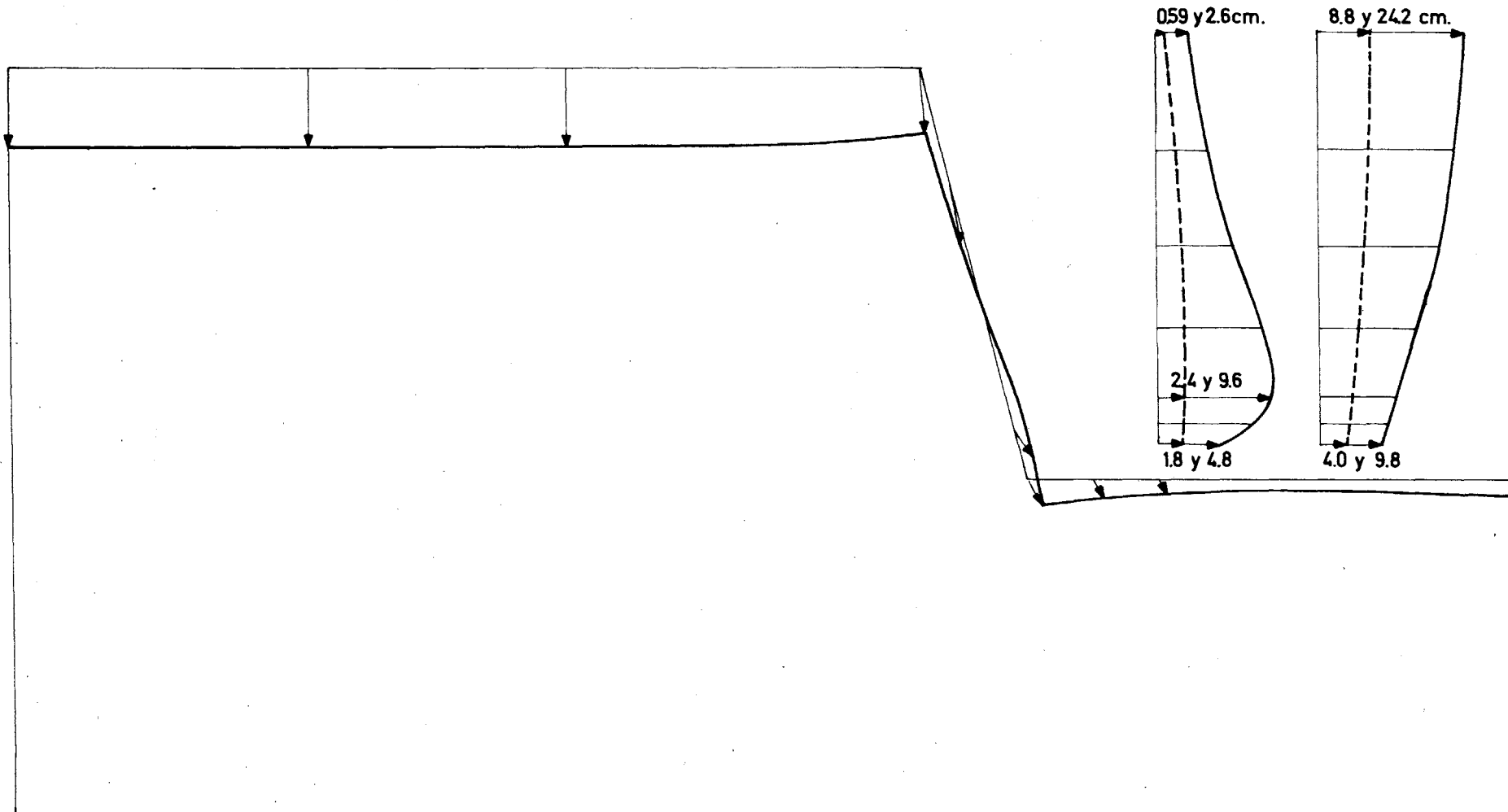


Fig. 12 .- Deformada del talud plano, y leyes de corrimientos.

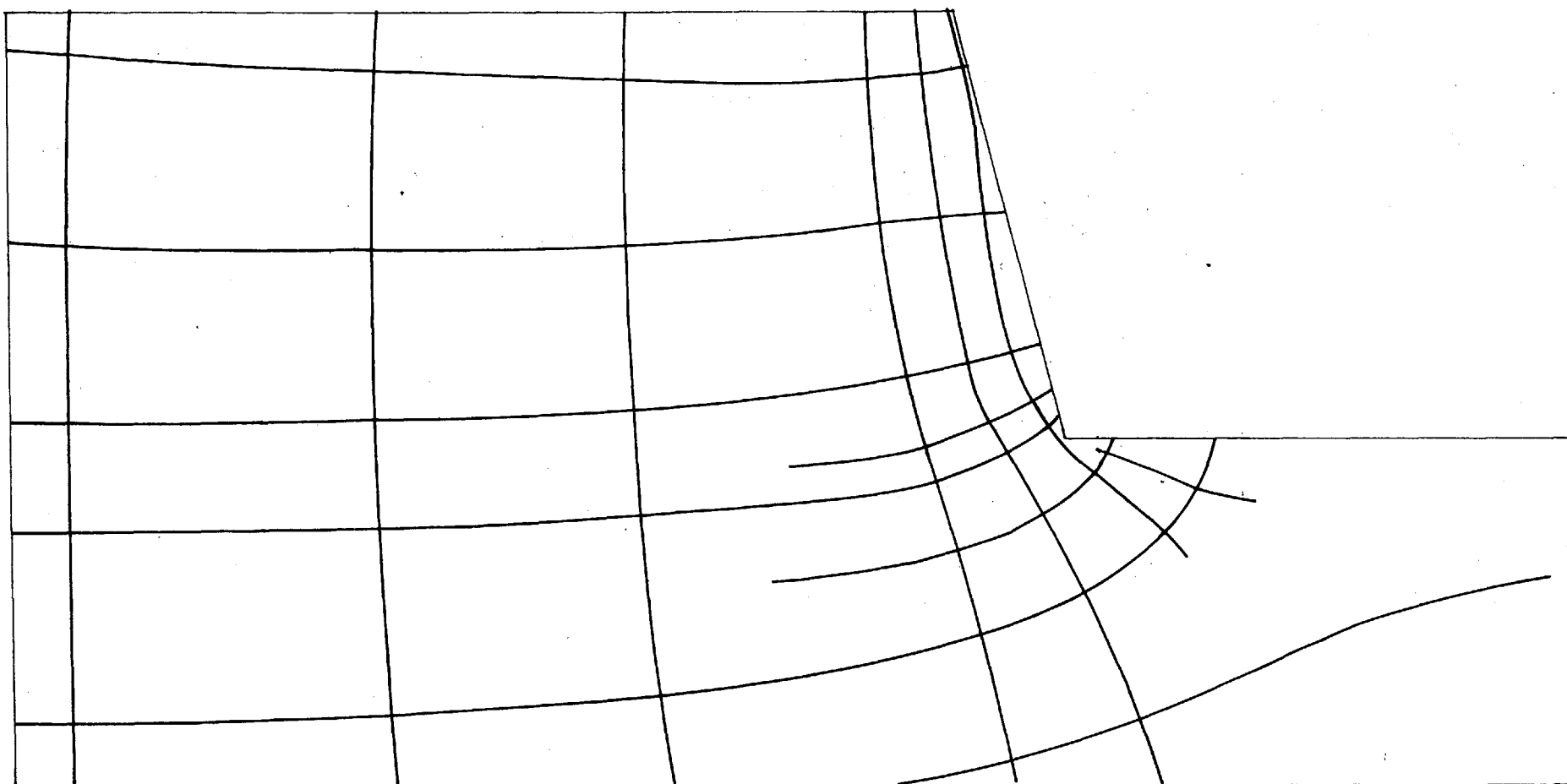


Fig. 13 .- Isostáticas en un talud plano, en rotura.

5.3. Talud ortolisténico

Partiendo de la ecuación diferencial de la curva de deslizamiento, deducida por Resal en la hipótesis de Rankine de los diámetros conjugados de la elipse de tensiones, Frontard obtuvo (1.922) como línea de deslizamiento para un talud plano (Ref. 10, págs. 213 y 222; Ref. 13, pág. 304) una curva cicloidal, una logoide y una parábola semicúbica, según la pendiente del talud sea mayor, menor o igual al ángulo de rozamiento interno.

Posteriormente Frontard (Ref. 13) invirtió los términos del problema, buscando como incógnita la forma del talud tal que su línea de deslizamiento sea conocida, resolvió el caso de línea de deslizamiento recta -talud ortolisténico-, o simétrica especular del propio contorno exterior del terreno -talud isolisténico-. Ambas formas tienen el interés teórico de permitir a un terreno alcanzar por encima de la línea de inclinación " ϕ " una altura infinitamente grande, manteniendo siempre una pendiente mayor de ϕ , si bien para ello es preciso alejarse un infinito de orden superior del pie del talud, pues es conocido que la influencia de la cohesión tiende a ser nula al crecer la altura.

Frontard señaló la posibilidad de obtener una economía al excavar taludes tallándoles las citadas formas (sobre todo con la ortolisténica), por los mayores desniveles que se pueden salvar en comparación con un talud plano, y por requerir un menor volumen de material arrancado al tener formas convexas. Estudiando esta posibilidad, a continuación se exponen los resultados de una comparación cuantitativa entre el talud ortolisténico, el plano, y el isorresistente.

La ecuación paramétrica de la ortolisténica simplificada es:

$$x = \frac{c}{2 \gamma \cos \phi} (z^2 - 1 + 2 \log \operatorname{nep} z)$$

$$y = \frac{c}{\gamma \cos \phi} \frac{z^2 - 1}{z}$$

Donde

$$z = \frac{\cos (a + \phi)}{\operatorname{sen} a}$$

y = ordenada de la superficie del terreno, según un eje vertical.

x = eje oblicuo, dirección del deslizamiento plano, inclinado " W " con la horizontal.

a = ángulo en cada punto de " x " dada entre la tangente a la línea de deslizamiento y la tangente a la línea del talud.

c = parámetro.

γ = densidad.

W = ángulo entre la dirección del deslizamiento y la horizontal.

La más económica resulta ser la denominada "máxima", cuando $W = \phi$

En la Fig. 14 se dibujan con trazo lleno los taludes ortolisténicos máximos para diversos valores del ángulo de rozamiento interno, y de trazo discontinuo los lugares geométricos de los vértices de coronación de los taludes planos, deducidos a partir del abaco de Taylor. Los primeros resultan ser ventajosos respecto de los planos a partir de cierta altura, y su ventaja crece al disminuir el ángulo de rozamiento y al aumentar el desnivel.

Ampliando la parte próxima al origen (Fig. 15) se observa que para $\phi = 0$ y alturas menores de $6,5 c/\gamma$ es más económico el talud plano, y

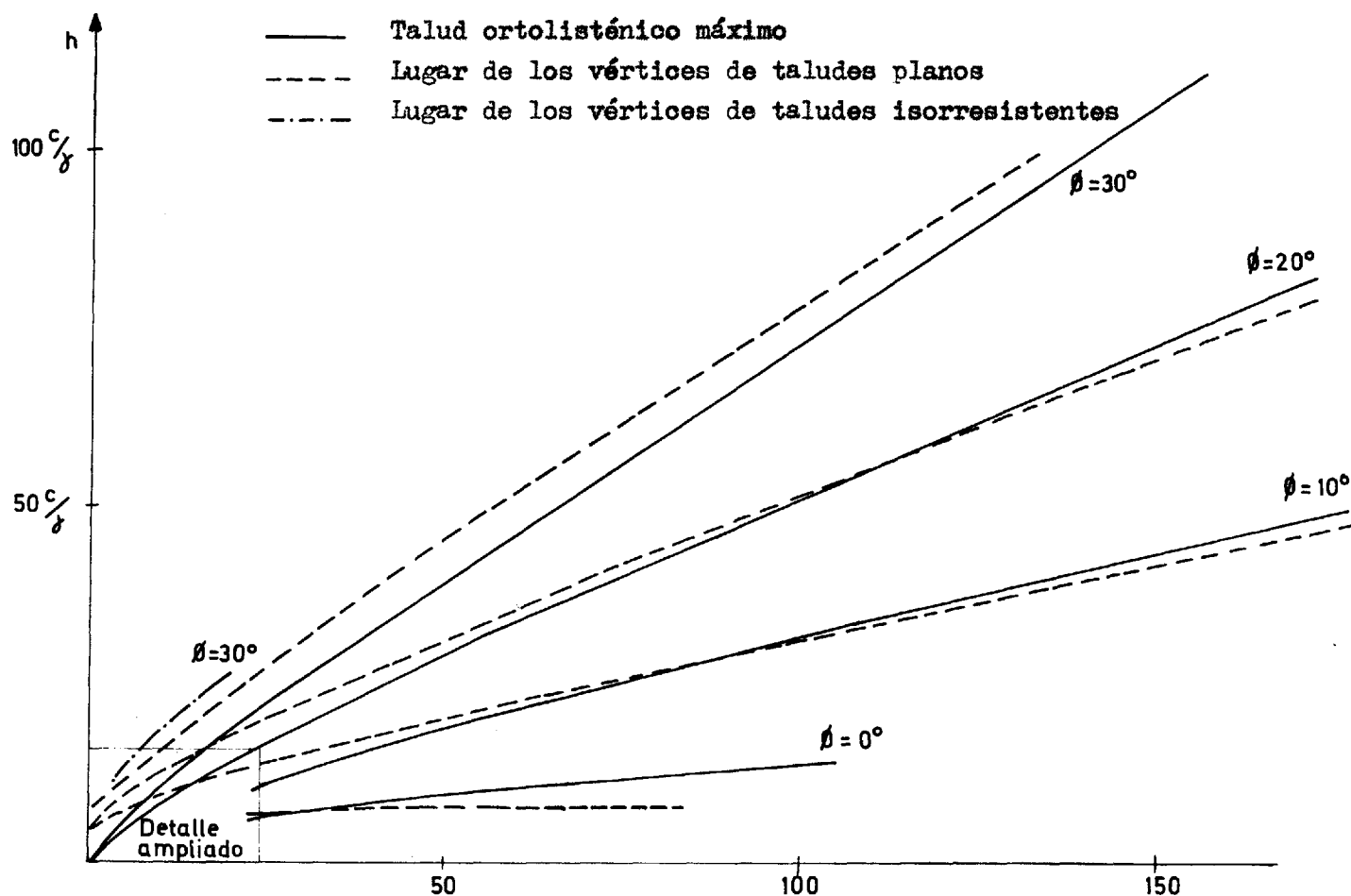


Fig. 14 .- Comparación entre taludes ortolisténicos y taludes planos de gran altura.

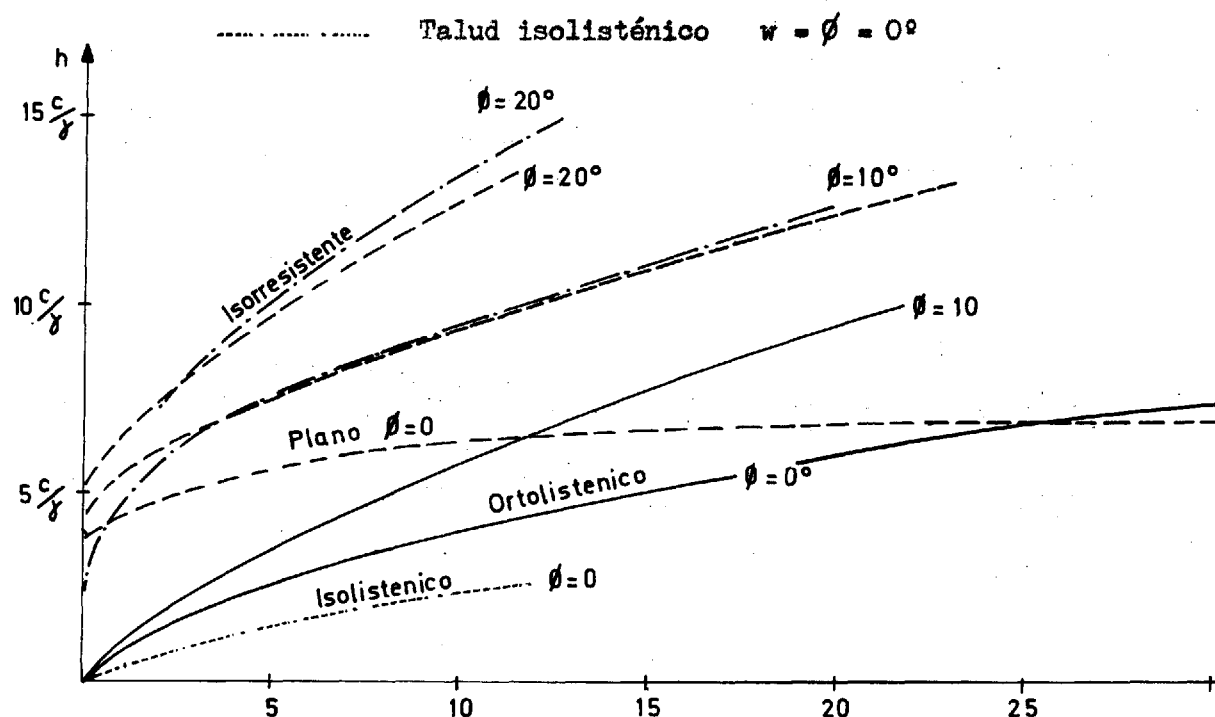


Fig. 15 .- Comparación entre taludes ortolisténicos, planos e isorresistentes para alturas pequeñas usuales.

sólo para alturas mayores tiene ventaja el ortolisténico, aunque resultan entonces taludes más tendidos (más de 1:3,75) que no se utilizan casi nunca.

En la Fig. 15 se muestra también ampliado los casos $\phi = 10^\circ$ y $\phi = 20^\circ$, en los que se ha añadido de puntos el lugar de los vértices de coronación de los taludes isorresistentes, tales que su tangente inicial sea vertical, y sustituyendo la sobrecarga por la altura de terreno equivalente, según Sokolowsky (Ref. 26, pág. 86). Para alturas normales, menores de 18 c/γ resulta aquí también más económico el plano que el ortolisténico. Entre el plano y el isotresistente, debido que se ha despreciado en el último la capacidad resistente del terreno en la sobrecarga equivalente, resulta difícil hacer comparaciones; pero dejando esto aparte, tiene ventaja aquel para alturas menores a 8 c/γ, y posteriormente el isorresistente suministra un coeficiente de seguridad ligeramente mayor a costa de un mayor volumen de excavación debido a su concavidad.

De las figuras anteriores se sacan por tanto las siguientes conclusiones:

Al construir un talud la forma más económica es la isorresistente, como ya se sabía, aumentando su ventaja al crecer la altura y el ángulo de rozamiento.

Al excavar un talud para alturas pequeñas las formas que requiere - arrancar menos material son la plana y la isorresistente. Los ortolisténicos para superficies deslizantes de pie son más económicos sólo al excavar grandes alturas en terrenos de arcilla saturada, cuando la estabilidad venga determinada a corto plazo ($\phi = 0$). Las pendientes obtenidas son tan suaves en estos casos, que se presentan poco en la práctica, y

el valor de los taludes ortolisténicos es más bien teórico, en contra de lo afirmado por Frontard. Por este motivo no se han estudiado más a fondo, calculando por ejemplo el instante de iniciarse su plastificación y observando como progresa ésta, aunque es de prever por su convexidad que el cociente entre la densidad que provoque la rotura total, y la que la inicie, debe ser bastante grande.

5.4. Talud isorresistente

Talud isorresistente es aquel que plastifica todo él simultaneamente, por lo tanto el coeficiente de seguridad a la rotura de cada partícula es el mismo, aprovechándose al máximo el material. Desde hace bastante tiempo a muchas presas de materiales sueltos se les da un perfil poligonal cóncavo, con mayor pendiente en coronación, acercándolas intuitivamente al perfil isorresistente y obteniendo así un ahorro de material; sin embargo hasta ahora en contadas ocasiones se ha aprovechado directamente esta forma teórica para comprobar o aproximar a ella la sección real de la presa (Uriel, Ref.29). El motivo de ello es por un lado la dificultad de cálculo, ya que las tabulaciones publicadas se refieren a casos teóricos simples, y lógicamente no incluyen los casos reales de embalse lleno, desembalse rápido, etc. , pero además según se señaló en el apartado 3.2.2. (páginas 17 a 19) la bondad del perfil teórico es dudosa, debido a que las hipótesis de partida para obtenerlo son un tanto groseras por considerar un material plástico rígido. (con deformaciones elásticas mulas y deformaciones plásticas indeterminadas), sin tener en cuenta la compatibilidad de deformaciones, y olvidando la influencia de las constantes elásticas del suelo, de las tensiones previas a la excavación, o de factores exteriores a la masa deslizante pero próximos a ella, como puede ser el punto singular del pie del talud.

En definitiva hay una serie de factores que pueden alterar la forma isorresistente y que hacen desaparecer gran parte del interés por su utilización, perdiéndose así una oportunidad de diseñar con mayor economía. Para comprobar el orden de magnitud de la influencia de algunos de estos factores se ha calculado por el método de los elementos

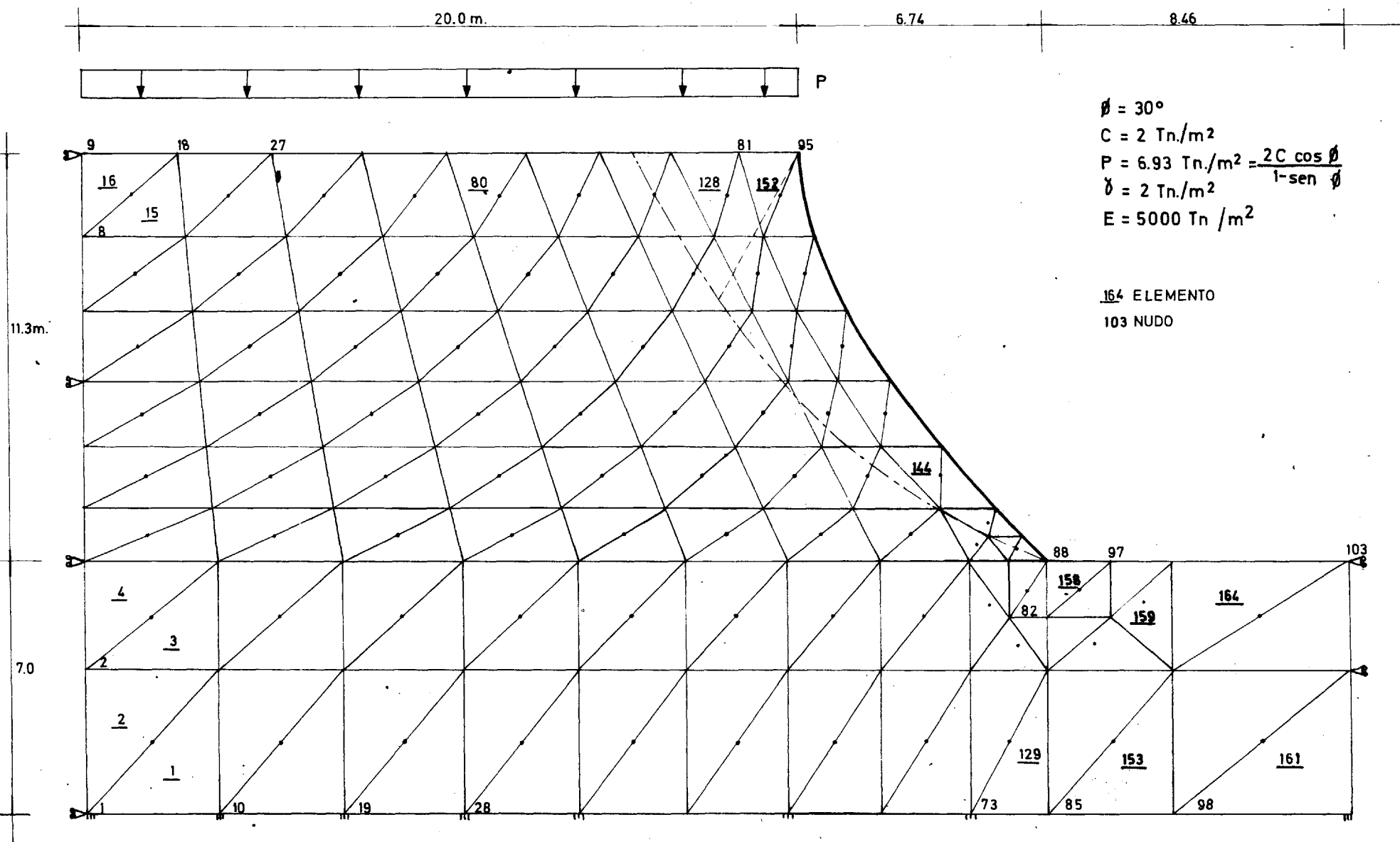


Fig. 16 .- Malla de elementos finitos para el talud isoresistente

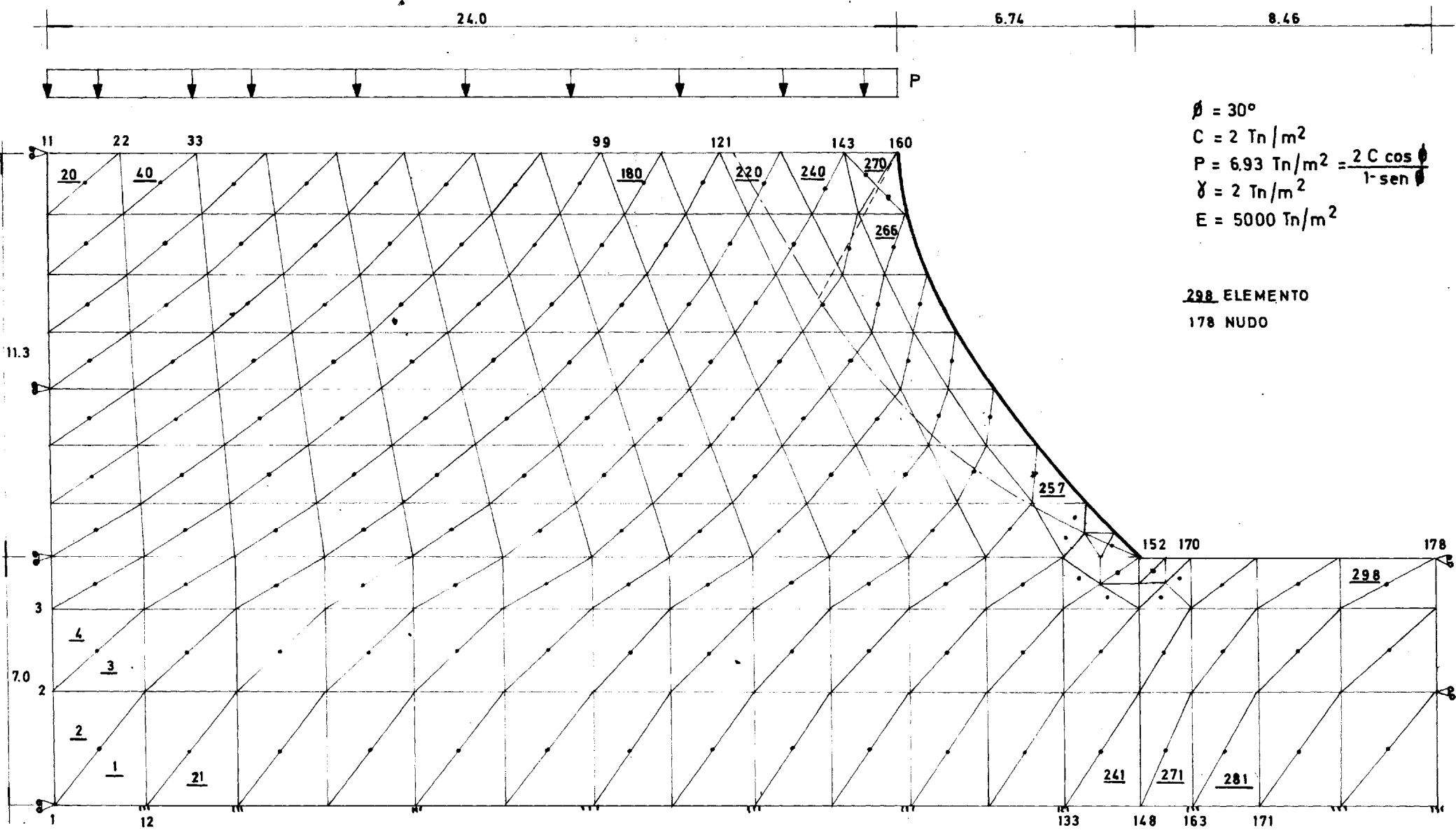


Fig. 16 bis.- Malla de talud isorresistente empleada para el control de la precisión.

finitos el talud isorresistente que Sokolowski pone por ejemplo (Ref. 26, pág.84), con ángulo de rozamiento interno de 30 grados, cohesión 2 tn/m^2 y sobrecarga uniforme en coronación $2 c \cos \phi / (1 - \sin \phi)$. La densidad teórica de rotura total repentina es $\gamma = 2 \text{ tn/m}^3$. El terreno se ha supuesto elastoplástico perfecto, y se ha tenido en cuenta la compatibilidad de deformaciones.

La Fig. 16 muestra la malla de elementos finitos empleada, comprobándose la flexibilidad de éstos para adaptarse a un contorno irregular. En la Fig. 16 bis se reproduce el mismo talud con una malla más fina que se ha utilizado como control de precisión calculándolo en fase elástica; las discrepancias obtenidas son menores al 1% en corrimientos, del 2% en tensiones verticales, y del 2 al 4% en tensiones horizontales y grado de plastificación, errores admisibles para la finalidad perseguida.

Se han repetido los cálculos para el mismo talud con dos coeficientes de Poisson distintos, de valores 0,25 y 0,333 lo que equivale a coeficientes de empuje al reposo de $K_0 = 1/3$ y $K_0 = 1/2$ respectivamente. La influencia de estos factores en las zonas plastificadas y su crecimiento es grande (Figs.17 y 18); para un coeficiente de Poisson bajo, la zona en estado de rotura se aleja bastante de la teórica de Sokolowski penetrando hacia el interior del terreno, pero esto no es de preocupar ya que para coeficientes análogos a los de los suelos reales ($\mu = 0,333$) la forma de dicha zona se asemeja mucho a la teórica. La principal discrepancia está en la parte alta, que es donde la malla de elementos finitos puede tener más error, con una disminución de las tensiones, por reproducir la carga continua mediante fuerzas concentradas en los nodos que no inciden directamente sobre los puntos en que se evalúan las tensiones.

En la parte superior de la Fig.18 se observa la concordancia obtenida entre las tensiones existentes a lo largo de la línea teórica

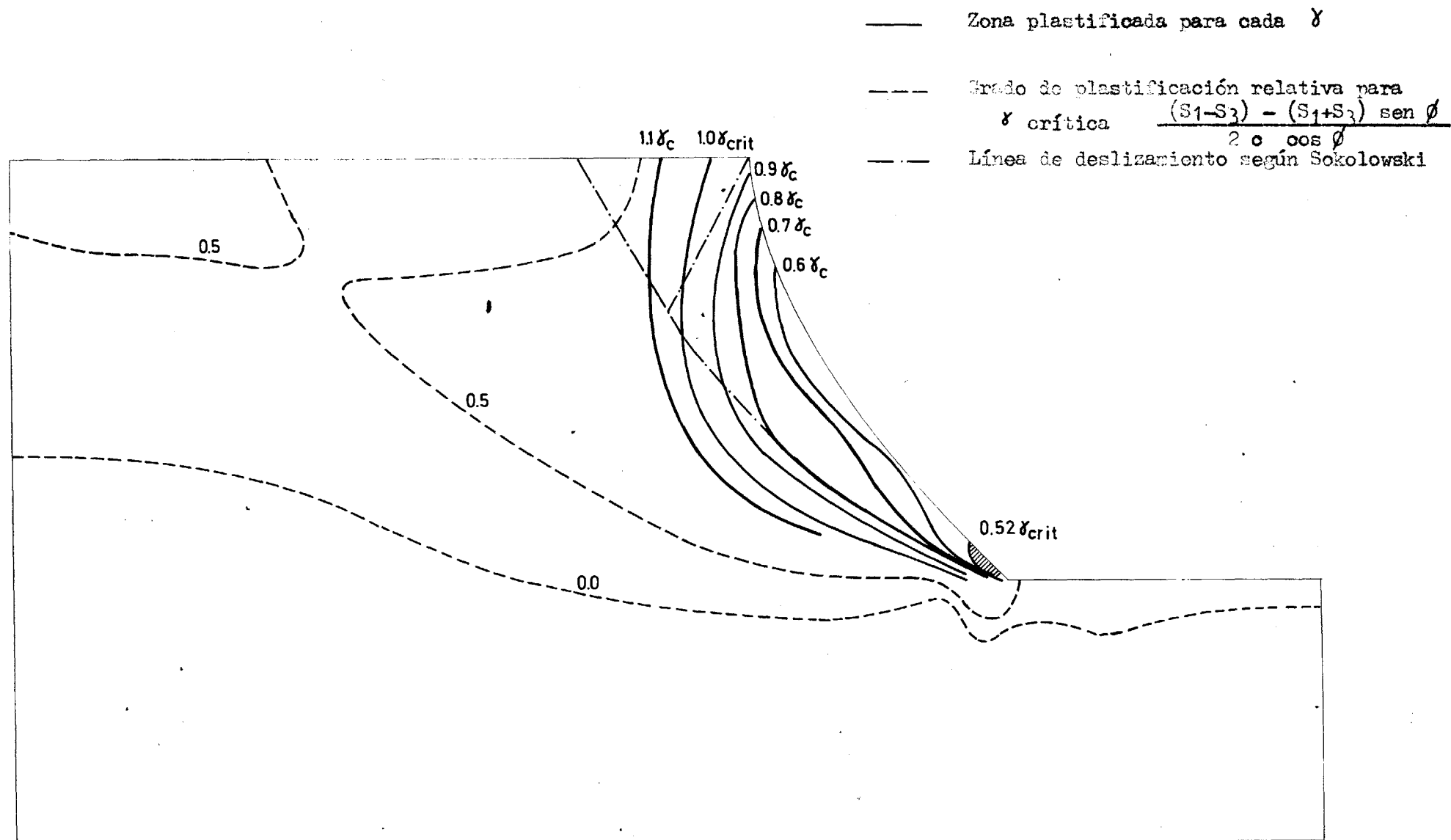


Fig. 17 .- Plastificación progresiva de un talud isorresistente. Coeficiente de Poisson $1/3$ $K_0 = 1/2$

- Zona plastificada para cada densidad
 - - - Plastificación relativa $\frac{S_1 - S_2 - (S_1 + S_2) \operatorname{sen} \phi}{2 c \cos \phi}$ con $\gamma_{\text{crítica}}$
 — Línea de deslizamiento según Sokolowski

Ley de tensiones sobre la línea teórica de deslizamiento para γ crítica

$$m = 0,25$$

- según Sokolowski.
 - - - según elementos finitos.

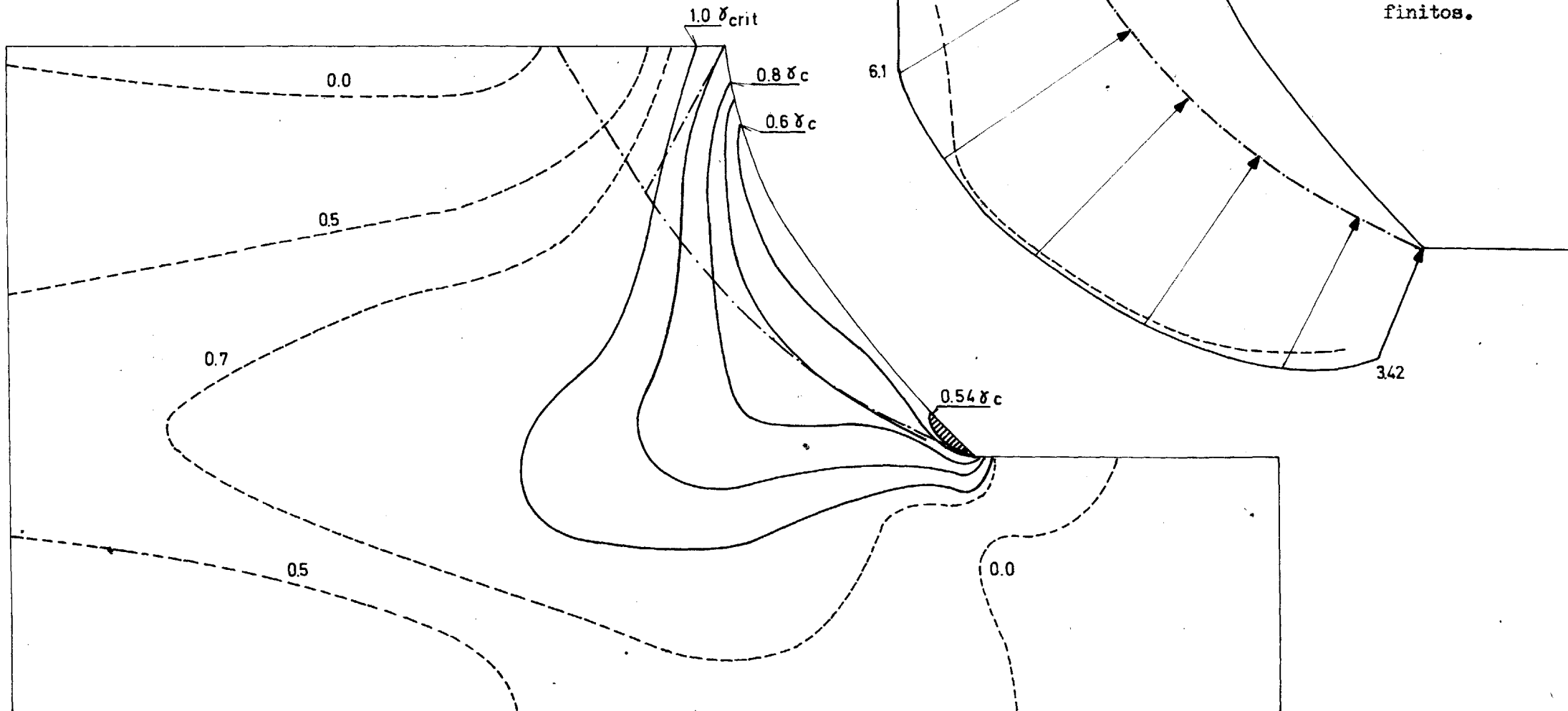


Fig. 18 .- Plastificación progresiva de un talud isorresistente. Coeficiente de Poisson 0,25.
 $K_0 = 1/3$

de deslizamiento, que es bastante buena con la salvedad indicada de la parte alta; es interesante hacer notar que la concordancia se da incluso con $m = 0,25$.

En la Fig. 19 se muestra la red de isostáticas tanto en fase elástica como en rotura.

Como era de esperar la influencia del vértice del pie del talud es muy grande, ya que crea una concentración de tensiones tal que anticipa la iniciación de la plastificación a un valor del 54 % de la densidad teórica. No obstante la zona plastificada crece muy rápidamente hacia arriba, manteniéndose muy pegada al frente del talud, confirmando cierto carácter de isorresistencia de éste.

De lo anterior se puede deducir que la forma teórica de talud isorresistente es bastante correcta, siendo necesario modificarla aumentando más su pendiente en coronación, y sobre todo sustituyendo el punto singular del pie, que es el causante de que se inicie prematuramente la rotura, por una superficie suave de transición entre el talud y la línea horizontal. Con esta salvedad, y a falta de comprobación experimental puede aceptarse como suficientemente exacto el método de cálculo más sencillo de las características, al menos para coeficientes de Poisson altos que son los usuales.

Las deformaciones, que como se sabe no podrían calcularse por el método de las características, se han representado en la Fig. 20. La obtención de las deformaciones es útil desde el punto de vista de investigación, para contrastar la bondad del modelo matemático ideal empleado con mediciones sobre taludes reales, pues los corrimientos pueden medirse directamente y con mayor facilidad y

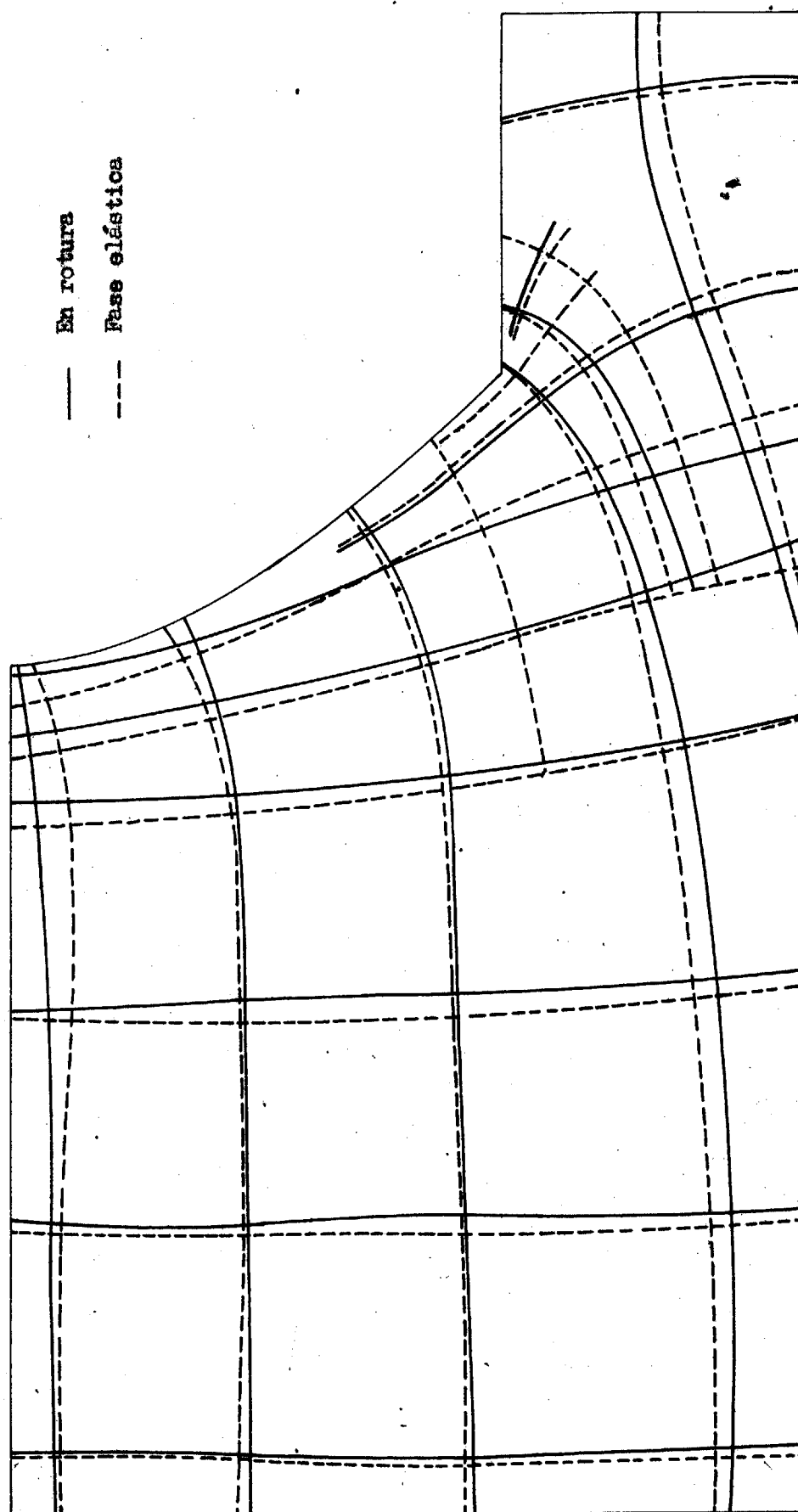


Fig. 19 .- Isostáticas en un talud isorresistente ($\gamma = 0,25$)

$m = 1/4$ $m = 1/3$

— — — Fase elástica $0,54 \gamma_{crítica}$
 - - - Con plasticidad contenida $0,75 \gamma_{crítica}$
 — — — En rotura con $\gamma_{crítica}$

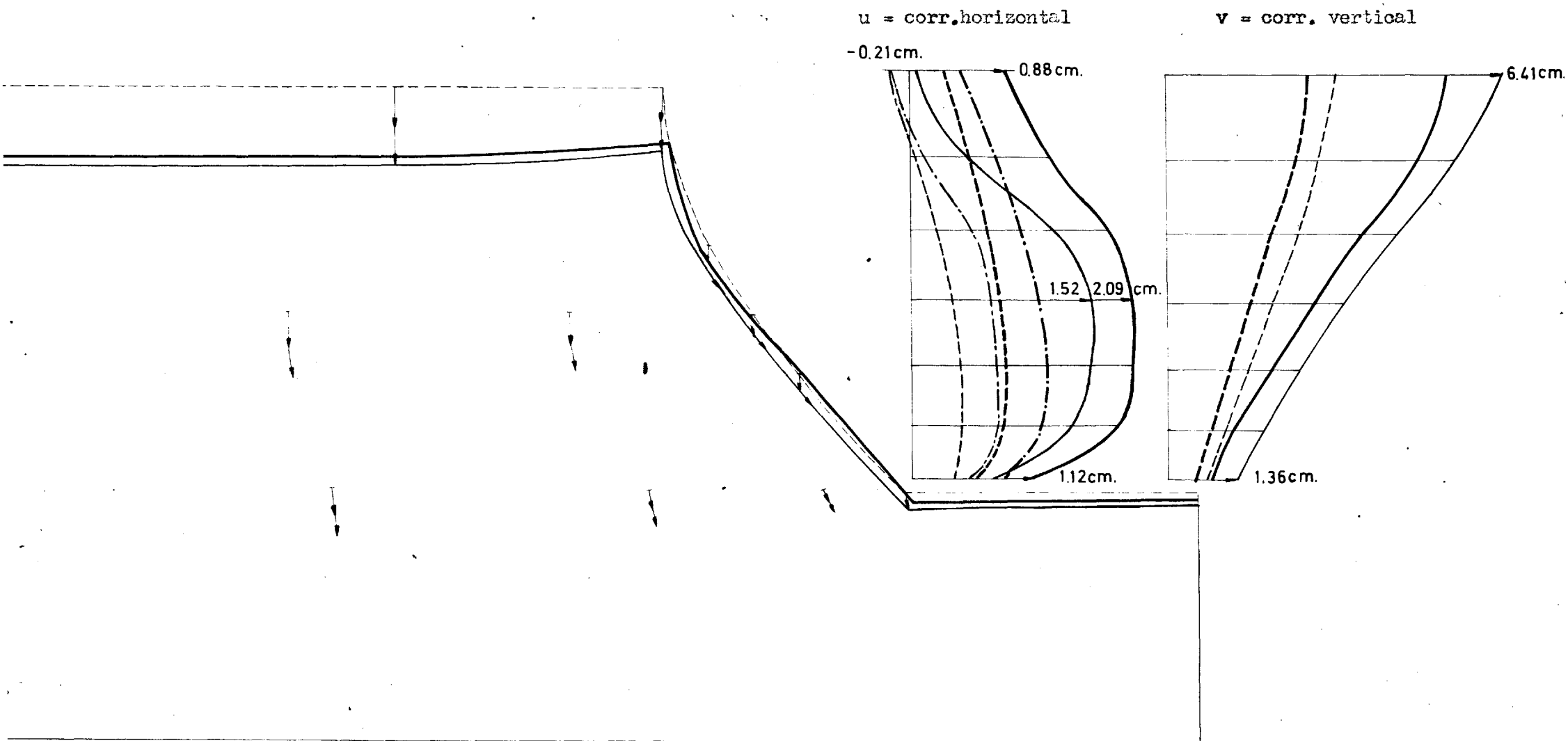


Fig. 20 .- Corrimientos en la superficie de un talud isorresistente.

exactitud que las tensiones. Pero tiene más importancia desde el punto de vista práctico para la vigilancia y control de presas o taludes en general, lo cual es aún más necesario para el talus isorresistente, que por definición tiene una rotura repentina sin apenas avisar y requiere afinar el cálculo de los componentes elásticos de deformación.

La deformada de la superficie del talud sigue una forma similar a la clásica de los taludes planos: asiento menor en el vértice de coronación que detrás de él, disminución del ángulo cóncavo del pie del talud, y forma de panza del frente con mayores corrimientos horizontales en los dos tercios inferiores. En el caso de coeficiente de Poisson menor, lógicamente los asientos verticales son mayores, y por liberarse menores tensiones horizontales (menor K_0) son menores los corrimientos horizontales.

5.5. Talud en terreno con dilatación prefijada

La forma más adecuada para estudiar la influencia de la dilatación del suelo (variación relativa del volumen durante la rotura) en el comportamiento de un talud es mediante un modelo matemático. En efecto, en un modelo material resulta prácticamente imposible reproducir dos materiales iguales en todas sus propiedades salvo en la dilatación, y además en la realidad la variación del rozamiento y de la propia dilatación con las deformaciones a lo largo del ensayo, enmascararía los resultados de éste.

Ese modelo matemático de terreno debe tener además de cohesión y rozamiento un nuevo parámetro, la dilatación " v " (ver Apéndice A), de modo que variando a voluntad sólo esta última sea posible abstraerse de las circunstancias y particularidades que alterarían los resultados, dejando desnuda exclusivamente la influencia de aquella.

Para el objeto deseado en este apartado, es suficiente, e incluso conveniente, el emplear un modelo de terreno no rigidizable, con " ϕ " y " v " constantes en todo el proceso de carga. En cambio para reproducir mejor un suelo real y estudiar problemas prácticos sería de desear que se tuviera en cuenta la variación de los parámetros del suelo, como hace Serrano para suelos plástico-rígidos (Ref. A-36); no obstante también podría emplearse el mismo modelo que en esta tesis, pues Bransby (Ref. A-4, pág. 8.24) afirma que la aproximación así obtenida comparada con ensayos en modelo reducido es aceptable, y desde luego mejor que si no se considerase la dilatación como es usual, teniendo por añadidura la ventaja de tener también en cuenta la fase elástica y la compatibilidad de de-

formaciones.

Se ha repetido el cálculo del mismo talud isorresistente (Fig.16) en el caso en que el ángulo de dilatación sea positivo e igual al de rozamiento $v = \phi = 30^\circ$ (modelo de terreno clásico, cuyos resultados se expusieron en las Figs. 17 y 20), y en el caso en que la dilatación sea nula $v = 0$ (terreno sin potencial plástico).

En el Apéndice D se reproducen parte de los resultados obtenidos con el ordenador, que se condensan en las Figs. 21 y 22.

Lógicamente se mantienen idénticos en la fase elástica ya que el criterio de rotura es siempre el de Mohr-Coulomb, y comienzan a apreciarse diferencias sólo para densidades mayores al 80 % de la crítica, creciendo las desigualdades a medida que progresa la rotura, pues lo que se ha cambiado han sido las relaciones tensión deformación elastoplásticas.

La dilatación no influye prácticamente en la rotura del talud. El único efecto es una ligera disminución de las tensiones horizontales (del uno al diez por cien en las proximidades de la línea de deslizamiento para la carga de rotura); esto se justifica porque al no existir un incremento de volumen, el interior del terreno está menos constreñido. Como consecuencia de lo anterior, el crecimiento de la zona plastificada es algo más rápido (hay áreas que rompen con una carga del uno al cuatro por cien menor).

En las deformaciones la influencia es mayor, como era de esperar cuando la dilatación es nula en vez de positiva, al no haber aumento de volumen los asentamientos son mayores (del orden del 1 %

$$\nu = \phi = 30^\circ; \nu = 0$$

- --- Corrimientos en fase elástica 0,52 γ crítica
 --- --- Corrimientos en plasticidad contenida 0,75 γ crítica
 --- --- Corrimientos para la carga de rotura teórica

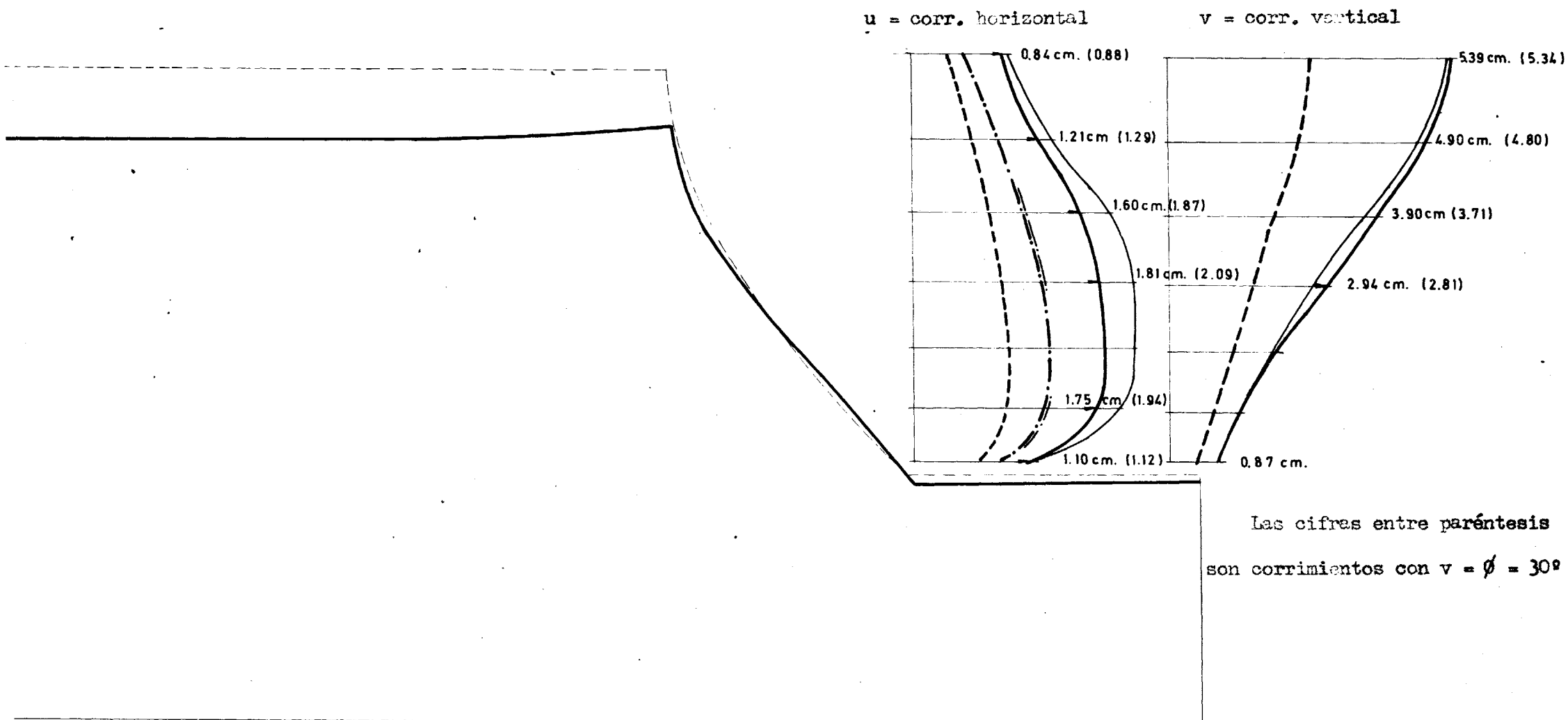


Fig. 22 .- Deformada de un talud isorresistente con dilatancia nula.

en coronación, alcanzando el 5,1 % a media altura del talud) y los corrimientos horizontales menores (el 2 % en el pie del talud, el 4,5 % en coronación y llegan al 13,2 % menores a media altura del frente).

Se ha confirmado rigurosamente por lo tanto la idea intuitiva de que la dilatancia no influye apenas en aquellos problemas en que las condiciones de contorno vienen impuestas por tensiones (peso propio del terreno en este caso), y sólo afecta de un modo apreciable a los corrimientos. Es de esperar que por el contrario sea decisiva en los casos cuyas condiciones de contorno estén dadas en deformaciones, como pueden ser una zapata, un pi lote o un muro rígido.

6. CONCLUSIONES

6.1. Resumen de conclusiones

Los resultados de la presente tesis son:

Confirmación de la viabilidad práctica del cálculo de un sólido con zonas en plasticidad contenida, utilizando distintos modelos matemáticos elastoplásticos y con un proceso de cargas prefijado.

Reconfirmación del proceso de crecimiento de la zona plastificada de un talud plano en un terreno coulombiano, comenzando en el pie del talud para acabar en la superficie de coronación, aunque con una carga mayor de la teórica.

Comprobación de que los taludes ortolisténicos carecen de interés práctico, pues aunque en casos muy particulares sean mejores que los taludes planos, no alcanzan la economía de los isorresistentes.

Comprobación de que la forma de talud isorresistente deducida por Sokolowski es relativamente correcta a efectos prácticos, alterándola poco la existencia de las componentes elásticas para coeficientes de Poisson altos, que son los normales en los suelos. Sin embargo la presencia del vértice del pie del talud hace que la rotura no se inicie simultáneamente a la rotura total, sino bastante antes.

Obtención de las relaciones tensión deformación para suelos elastoplásticos sin potencial plástico, con cohesión, rozamiento y di-

latancia prefijada constantes.

Comprobación rigurosa de que la dilatancia no influye practicamente en la estabilidad y en la plastificación progresiva de un talud, aunque si en su campo de deformaciones.

6.2. Perspectivas futuras

Como continuación de esta tesis se marcan las siguientes líneas como posible campo de investigación futura:

Empleo de modelos elastoplásticos más perfectos. Son de interés el sólido coulombiano rigidizable, con rozamiento y dilatancia no constante, siguiendo a Serrano (Ref. A-36), y también la Cam-Clay modificada (apartado A -4.2.2., pág. A-30) que cierra la pirámide exagonal irregular de Mohr Coulomb con un elipsoide de revolución creciente (Fig. A-16). Un campo muy necesitado de progresos, con grandes dificultades teóricas y muy poco estudiado, es el de los materiales reblandecibles o con "softening".

El modelo de terreno de dilatancia prefijada constante, cuyas leyes tensión deformación se han deducido aquí, presenta una mayor confiabilidad para tratar problemas en los que las condiciones de contorno se definan en corrimientos. Por ello sería interesante estudiar la plastificación progresiva del terreno en el caso de estar sostenido por un muro rígido, sometido a empuje pasivo o a empuje activo, y es de esperar que la influencia de la dilatancia sea mayor en este caso que no en el del talud. El caso de empuje activo

reviste más interés para ser estudiado por este procedimiento matemático, ya que existen dificultades para hacerlo con modelos reducidos, los cuales en cambio se han aplicado con cierta profusión en la investigación sobre el empuje pasivo.

6.3. Comentario final

En los problemas reales de la Mecánica de suelos intervienen una multitud de factores: la anisotropía estructural o inducida, la elasticidad no lineal, el proceso constructivo que gobierna la trayectoria de tensiones, la plasticidad, con posibilidad de un endurecimiento (arcillas blandas) o por el contrario de un reblandecimiento (arcillas preconsolidadas), la dilatancia, las presiones intersticiales, los efectos dinámicos, la viscosidad... De ellos la plasticidad es sin duda uno de los más importantes, motivo por el que se ha intentado retratarla en esta tesis; pero no hay que olvidar que cuando se crea una teoría, se contrasta con la realidad y resulta una alentadora coincidencia, el motivo no es sólo la bondad de aquella, sino el que se compensen los errores de las magnitudes no tenidas en cuenta.

¿ Hasta que punto la elastoplasticidad, que es ya una aproximación de segundo orden, puede ser suficiente a efectos prácticos ? Resulta difícil contestar a esta pregunta categóricamente, pero es indudable que con ella se ha dado un nuevo paso, se ha añadido un nuevo término al desarrollo en serie de los conocimientos y cálculos del ingeniero, y si bien el método elastoplástico es aún embrio

nario su aplicabilidad práctica progresa, dando ya resultados no sólo cualitativos sino incluso cuantitativos.

Por último debe reconocerse lo modesto y minúsculo de la contribución de la presente tesis, a pesar de haberla realizado dentro - de un campo de horizontes tan amplios como es la Mecánica de Suelos, y haber vertido en ella un afán de servicio y un empeño de continuar en la tarea de la investigación.

Agradecimiento

Deseo expresar mi agradecimiento a D. José Antonio Jiménez Salas por sus consejos y por la Dirección de esta tesis, a Alcibiades Serrano por iniciarme en el sendero de la Plasticidad y darme fuerzas con el ejemplo de su vocación, a Cesar Sagaseta y Enrique Castillo por su colaboración directa, en estrecha labor de equipo, en la realización del programa de cálculo electrónico, y a Carlos Lorente de No Cabezas por sus interesantes comentarios y orientaciones.

Apéndice A

P L A S T I C I D A D

APENDICE A

PLASTICIDAD



Indice del Apéndice A - Plasticidad

	<u>Pág.</u>
1.- Introducción.	3
2.- Elasticidad.	6
3.- Plasticidad.	10
4.- Criterios de rotura.	
4.1.- Sólidos cohesivos.	17
4.2.- Sólidos con rozamiento.	
4.2.1.- Sólido elastoplástico perfecto.	21
4.2.2.- Sólido rigidizable. "Cam Clay".	30
4.3.- Sólidos sin potencial plástico.	36
5.- Aplicación a la mecánica del suelo.	
5.1.- Discusión.	38
5.2.- Relaciones incrementales tensión deformación propuestas.	41

1.- INTRODUCCION

El estudio del comportamiento de los suelos puede realizarse por dos caminos. El primero de tipo experimental, observando "in situ" y sobre todo en laboratorio su forma de reaccionar ante las fuerzas que se le aplican, y obteniendo una serie de leyes empíricas. El segundo es más abstracto, asimilándolo a unos modelos matemáticos; se realizan una hipótesis simplificadoras y se elaboran a partir de ellas unos razonamientos hasta obtener unas leyes de comportamiento en función de unos parámetros característicos, y por aproximaciones sucesivas se modifican dichas hipótesis convenientemente de modo que las leyes finales concuerden lo mejor posible con la realidad experimental; si bien es verdad que muchas de las simplificaciones o hipótesis se aceptan, aunque nos alejen de la realidad, por evitar las excesivas complicaciones que aparecen durante el desarrollo matemático.

Otros sólidos, fundamentalmente los metales, se han tratado eficazmente por estos procedimientos, alcanzándose teorías muy consistentes, relativamente simples y manejables, universalmente aceptadas, y que realmente han dejado resuelto el problema planteado. Sin embargo los suelos tienen un comportamiento mucho más heterogeneo, disperso y enormemente más complejo.

A la importancia que en ellos adquieren la anisotropia, los fenómenos plásticos aún a niveles de tensión muy bajos, la dilatación, las deformaciones grandes y las diferidas, hay que añadir el hecho de su caracter discontinuo, que conduce a un distinto modo de reaccionar según el signo de las tensiones, y a una

imposibilidad de tomar muestras realmente inalteradas.

Debido a estos motivos hoy no existe un cuerpo de teoría suficientemente satisfactorio, y a veces se ha trabajado directamente con tablas de resultados experimentales, aunque como indica Scott (Ref. 11-35 pág. 13) ello es muy criticable; efectivamente esas tablas responden sólo a unos ensayos individuales, realizadas en unas condiciones determinadas, en general diferentes y menos generales que los estados tensionales reales en el campo, pudiendo incluso no ser invertibles (obtención de tensiones a partir de deformaciones, o viceversa) y no estar sujetas a ninguna de las consideraciones teóricas de tipo energético o similar.

Las aproximaciones elásticas de Boussinesq y de los sistemas multicapas y cuerpos ortotropos, o la rigideoplástica de la teoría de las características de Sokolowski, cada vez más explotadas y sofisticadas, dan una eficaz ayuda en muchos casos, pero deben ya ir acompañados de los estudios con modelos elastoplásticos. Por ejemplo el cálculo elástico de tensiones verticales es bastante exacto, pero no así el de las tensiones y corrimientos horizontales, determinantes en el problema del talud. Hoy se reconoce la importancia de las relaciones tensión-deformación (Ref. 16 pág. 798; Ref. 11-35 pág. 1) cuya aplicación venía frenada hasta hoy por dificultades técnicas de los laboratorios, dificultades matemáticas (resueltas con el uso de los ordenadores) y por el problema aún vivo de encontrar una teoría matemática concordante con la realidad del suelo.

Sin embargo el esfuerzo realizado y las energías empleadas hoy, arrancando de las teorías elástica y plástica

clásicas, comienza ya a dejar a estas ~~atras~~. A continuación se resumen sin gran detalle dichas teorías clásicas, para posteriormente discutir su validez y utilidad para la Mecánica del Suelo. Por último se detallan las ecuaciones del modelo matemático escogido para su utilización en esta tesis.

2.- ELASTICIDAD

Un sólido puede definirse como elástico cuando en un proceso de descarga recupera toda la deformación que tomó durante su carga, mientras que su comportamiento será plástico al conservar una deformación remanente (Fig. A-1 y A-2 b).

Dicha deformación total elástica puede ser instantánea o diferida, en cuyo caso se dice que el cuerpo posee - viscosidad (Fig. A-2).

Existe también la posibilidad de que la relación - entre la tensión y la deformación sea constante (elasticidad lineal o Hookiana; Fig. A-1b) o por el contrario que varíe - aún dentro de la zona recuperable no plástica (rama OP de la Fig. A-1a). Esto suele ocurrir por ejemplo en las arcillas - blandas (Kondner), o también al pasar de compresiones a traciones. .

En el espacio de las tensiones efectivas (Fig. A-3) con ejes cartesianos $S_x = e_x$; $S_y = e_y$; $S_z = e_z$ puede representarse el estado tensional y deformacional de un punto del sólido, en la hipótesis de coincidencia de ejes de los tensores de tensiones "s" y de deformaciones "e", que se relacionan por la ley de Hook generalizada.

$$S_i = (C_{ij}) e_j \quad i, j = 1, \dots, 6$$

En ocasiones por conveniencia se designará S_i con dos subíndices.

Según la equivalencia

$$\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ & S_{yy} & S_{yz} \\ & & S_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 & S_4 & S_6 \\ & S_2 & S_5 \\ & & S_3 \end{pmatrix}$$

En el caso más general de anisotropía, al ser la " C_{ij} " simétrica hay 21 parámetros independientes. En caso de ortotropía se reducen a 9, para anisotropía radial (ver Apéndice B, apartado 2-2) solo a 5, y en isotropía a 2. Estos últimos pueden ser el módulo de Young " E " y el coeficiente de Poisson " m ", o en su lugar el módulo de deformación volumétrica " K " y el de deformación tangencial " G " definidos por la relación.

$$K = \frac{E}{3(1-2m)} \qquad G = \frac{E}{2(1+m)}$$

Estos parámetros suelen utilizarse al separar el tensor de tensiones " S_i " en un tensor hidrostático o esférico " S ".

$$S_{ii} = \frac{S_x + S_y + S_z}{3} \qquad e_{ii} = \frac{e_x + e_y + e_z}{3}$$

y un tensor desviador

$$S'_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3} S_{ii} d_{ij} \qquad (d_{ij} = \text{delta de Kronecker})$$

Entonces la ley de Hook se descompone en

$$S_{ii} = 3 K e_{ii} \qquad S'_{ii} = 2G e'_{ii}$$

La representación de estos tensores en el espacio tensional de la Fig. A-3 se corresponde con los vectores OP' y $P'P$ respectivamente. El plano perpendicular a la diagonal principal por P' contendrá todos los puntos con igual tensión hidrostática.

Las tensiones principales serán las tres raíces de

$$x^3 - I_1 x^2 + I_2 x - I_3 = 0$$

Siendo "I" las invariantes del tensor de tensiones totales.

$$I_1 = S_x + S_y + S_z$$

$$I_2 = S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x$$

$$I_3 = S_x S_y S_z$$

Tienen importancia práctica, como luego se verá, - las invariantes del tensor desviador de tensiones.

$$J_1 = S'_x + S'_y + S'_z = 0$$

$$J_2 = S'_x S'_y + S'_y S'_z + S'_z S'_x$$

$$J_3 = S'_x S'_y S'_z = -\frac{1}{3} \{ S_1'^3 + S_2'^3 + S_3'^3 \}$$

Sobre todo tiene aplicación el segundo invariante, cuyo valor es proporcional al área de los tres círculos de Mohr, y que tiene otras expresiones equivalentes,

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{6} \left[(S_1 - S_2)^2 + (S_2 - S_3)^2 + (S_3 - S_1)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{6} \left[(S_x - S_y)^2 + (S_y - S_z)^2 + (S_z - S_x)^2 \right] + S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2 = \\ &= \frac{1}{2} (S_x'^2 + S_y'^2 + S_z'^2) + S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2 \\ &= \frac{I_1^2}{3} - I_2 \end{aligned}$$

También es de utilidad la representación axonométrica, sobre el plano perpendicular a la diagonal principal (Fig. A-5). En el se proyectan los tres ejes de tensiones - formando entre sí 120 grados.

El ángulo "a" de PP' con OS₁ viene definido por el parámetro de Lode:

$$L = \frac{2 S_1 - S_2 - S_3}{S_2 - S_3}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{\sqrt{3}}{L} \quad \text{o también} \quad \cos 3a = 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^3}$$

y el radio P'P resulta ser $PP' = \sqrt{2J_2}$

Un ensayo triaxial de compresión $S_1 > S_2 = S_3$ viene definido por $a = 0^\circ$ y otro triaxial de extensión $S_3 < S_2 = S_1$ se define por $a = 60^\circ$.

3.- PLASTICIDAD

La teoría plástica comprende los siguientes puntos básicos (Ref. A-16; Ref. 3 pags. 29-35).

1º) Existe una función de las tensiones denominada función o criterio de rotura (Fig. A-3)

$$f(S_i) = K$$

normalmente expresada en función de las invariantes del desviador.

$$f(J_2, J_3) = K$$

Los puntos interiores a ella

$$f(S_i) < K$$

tienen un comportamiento elástico, es decir, su deformación e^e es recuperable.

Si las tensiones son tales que verifican el criterio anterior, existirá una deformación plástica no recuperable (Fig. A-1a y A-2b).

$$e^p \neq 0 \qquad e = e^e + e^p$$

No es posible que sea $f(S_i) > K$

2º) El cuerpo es isotropo antes y después de la plastificación. Se supone la coincidencia de ejes de los tensores de tensión e incrementos de deformación (hipótesis de St. Venant).

La anisotropía en plasticidad está poco estudiada (Ref. A-16 cap. XII; Ref. A-25 pág. 29), especialmente en lo relativo a suelos, motivo por lo que aquí no se trata, pese a reconocer su importancia real.

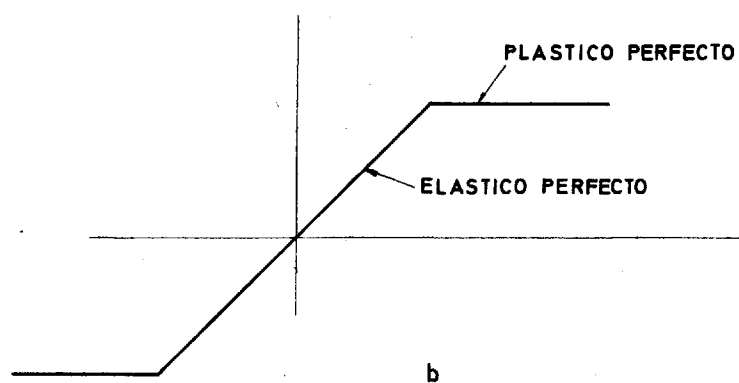
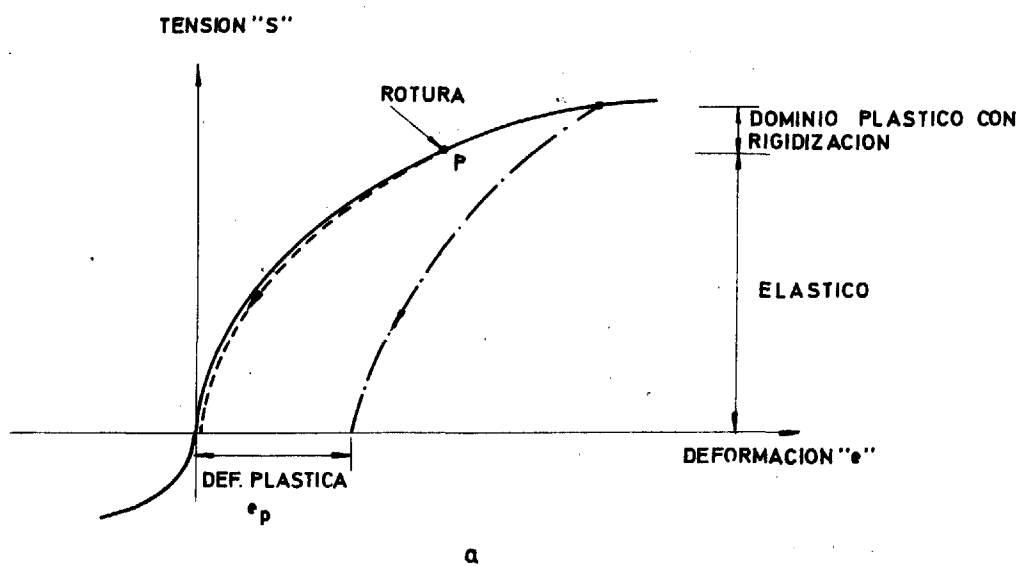
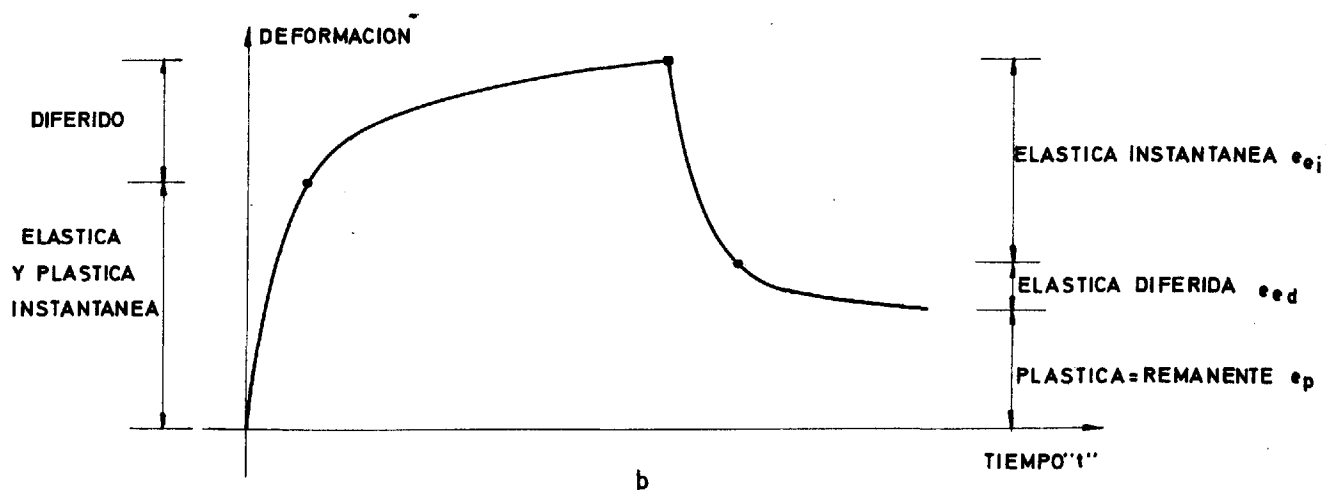
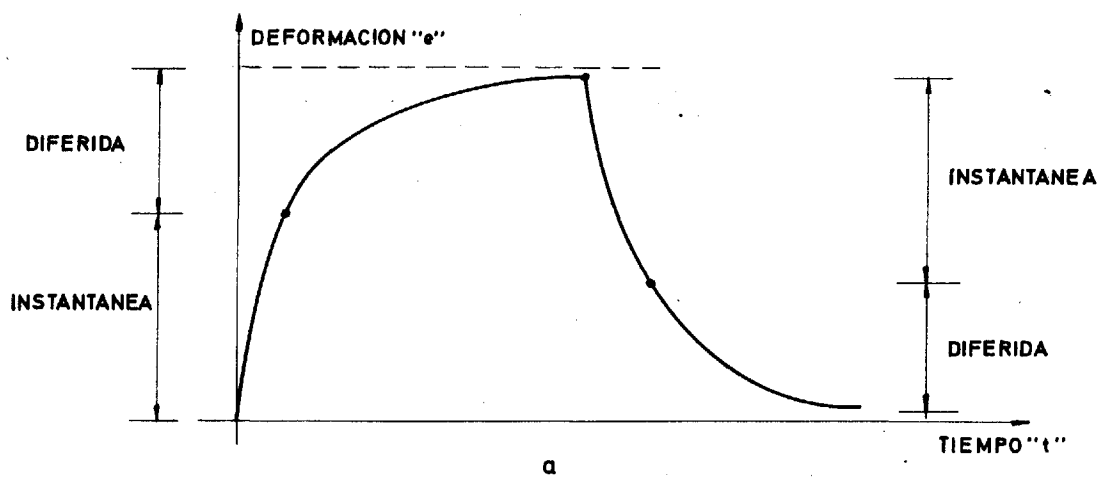


Fig. A-1



3º) Supone Drucker que durante la carga (Ref. A-25 pág. 24; Ref. A-13 pág. 144) se cumple.

$$ds_i \cdot de_i > 0$$

y en un ciclo completo (postulado del trabajo plástico máximo)

$$ds_i \cdot (de_i - de_i^e) \geq 0$$

El signo igual corresponde a la fase elástica, y el mayor a la plástica.

De ahí se deduce

$$ds_i \cdot de_i^p > 0$$

que se denomina condición de estabilidad. Su interpretación es que al existir deformación plástica hay un trabajo plástico no recuperable, la energía empleada la absorbe el cuerpo pudiendo cambiar sus propiedades, rigidizándose o endureciéndose; tal es el caso del estirado en frío del acero, o de la preconsolidación de las arcillas.

Por el contrario aquellos materiales "reblandecibles" ("softening" en oposición a "hardening"), con resistencia residual, que no cumplen la condición anterior, no son "estables"; durante un proceso de carga en ellos no es posible alcanzar el equilibrio una vez sobrepasada la resistencia de pico.

De la anterior hipótesis se deduce la convexidad de la superficie de rotura (Ref. A-13 pág. 147).

4º) En los materiales rigidizables (Ref. A-16 pág. 26) la función de rotura se expande sin cambiar de forma, homotéticamente, en función del trabajo plástico realizado (Fig. A-1a).

$$f(S_i) = K(W_p) \quad W_p = \int S_i \cdot de_i^p$$

Cuando " $d_{s_i} \cdot de_i^p = 0$ " el incremento de tensión se denomina "neutro"; (Ref. A-16 pág. 33) pues no desarrolla trabajo plástico, manteniéndose a lo largo de la superficie criterio de plastificación, que en ese momento no se expanda.

Se entiende por cuerpo plástico perfecto aquel que carece de endurecimiento (Fig. A-1 b), la superficie de rotura es constante

$$f(S_i) = K \neq K(W_p)$$

y al llegar a ella las deformaciones crecen indefinidamente, salvo si el contorno las detiene.

- 5º) En la descarga: $d_{s_i} \cdot d_{e_i} < 0$
 el comportamiento es elástico [Fig. A-1 a]
 Se supone que no hay ciclos de histeresis

En la teoría clásica de metales se hacen también - las dos hipótesis siguientes, no válidas para suelos.

- 6º) Una tensión hidrostática no influye en el criterio de plasticidad, es decir, éste será del tipo indicado antes.

$$f(J_2, J_3) = K$$

y no del tipo

$$f(I_1, J_2, J_3) = K$$

En el primer caso la superficie de rotura es cilíndrica, y el cuerpo carece de rozamiento. Basándose en la regla

de la normalidad que posteriormente se define, se demuestra que la deformación volumétrica plástica es nula siempre - (Ref. A-16 pág. 26 y 50).

$$d_{e_{ii}}^P = 0$$

mientras que en los cuerpos con rozamiento es siempre positiva (Ref. A-35 pág. 15)

7º) No existe efecto Bauschinger, comportándose el cuerpo igual a tracción que a compresión.

Por último, el resultado más interesante de toda esta teoría es la "regla del flujo plástico", es decir la obtención de la relación tensión - deformación.

8º) El incremento de las deformaciones plásticas es función lineal del incremento de tensiones. La relación entre ambas, puede expresarse como producto de una constante positiva de proporcionalidad, por las derivadas parciales respecto de las tensiones de otra función escalar "g" denominada función potencial plástico.

$$d_{e_i}^P = h \cdot \frac{dg_i}{ds_i} \cdot df \quad h > 0$$

Suponiendo la coincidencia del potencial plástico y el criterio de rotura, $f = g$ (Ref. A-16 pág. 50) se llega a

$$d_{e_i}^P = h \frac{df}{ds_i} df$$

y en los cuerpos perfectamente plásticos, en que $df = 0$

$$d_{e_i}^P = \lambda \frac{df}{ds_i}$$

Esta ley fue tomada como hipótesis por Von Mises

(Ref. A-16 pág. 34; Ref. A-25 pág. 19), pero puede demostrarse a partir de los postulados de Drucker (Ref. A-13 pág. 146). Prager le dió la interpretación geométrica de la "normalidad": el vector de flujo plástico es perpendicular a la función de rotura, y dicha perpendicularidad no sólo se cumple en el espacio de las tensiones (Fig. A-3), sino también en el plano triaxial, de ejes.

$$p = \frac{s_1 + s_2}{2} \qquad q = \frac{s_1 - s_2}{2}$$

Para aquellos casos en que el criterio de plastificación tenga líneas angulosas (criterios de Tresca y Mohr Coulomb por ejemplo) existe una generalización debida a Koiter (Ref. A-13 pág. 145; Ref. A-25 pág. 39) que indica que el vector de deformaciones plásticas está comprendido entre las normales.

$$d_{e_i}^P = \lambda_1 \frac{df_1}{ds_i} + \dots + \lambda_m \frac{df_m}{ds_i}$$

92) Está demostrada la unicidad de la solución (Ref. A-16 cap. III; Ref. A-25 pág. 43; Ref. A-12) en la hipótesis de coincidencia de las funciones potencial y de rotura.

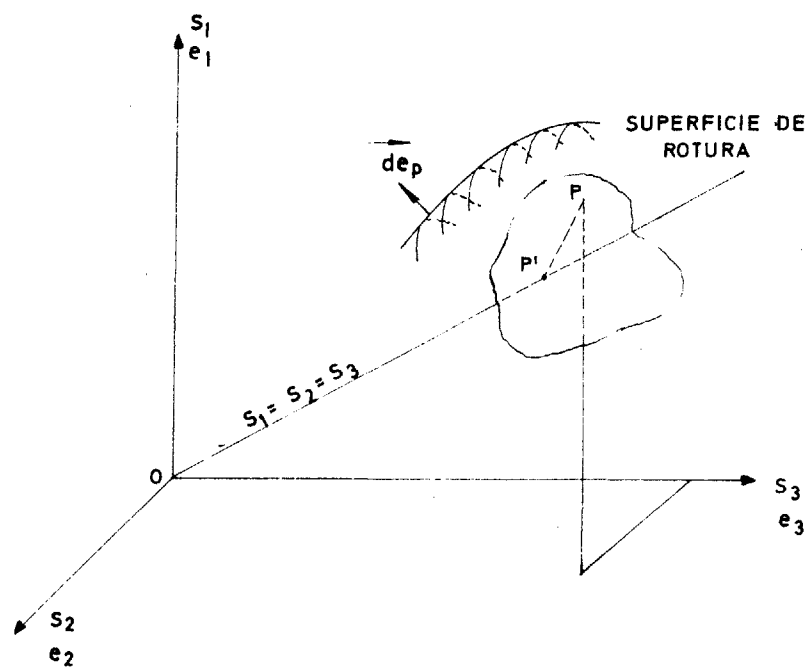


Fig. A-3

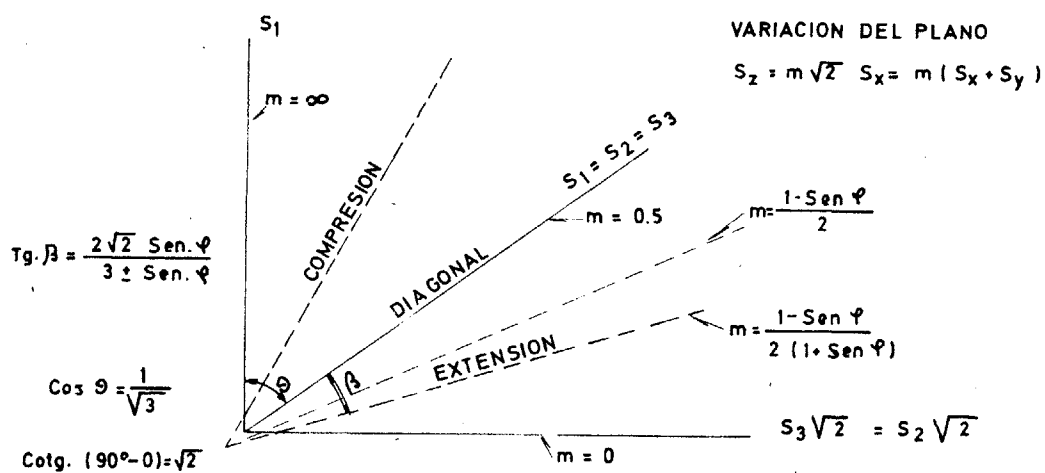


Fig. A-4

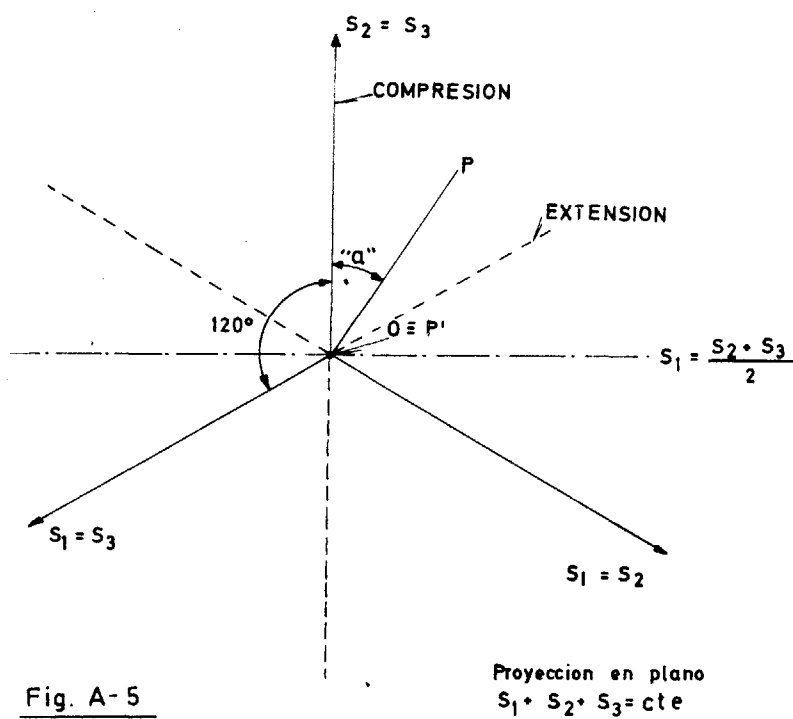


Fig. A-5

4.- CRITERIOS DE ROTURA

4.1. Sólidos Cohesivos.-

Algunos criterios sólo tienen interés histórico. Tales son el de Rankine, el de Saint Venant y el de la energía de deformación elástica.

El de Rankine o de la tensión principal máxima se presenta por un cubo en el espacio de las tensiones principales, y por un cuadrado (Fig. A-6) en el plano S_1 S_2 (tensión plana). Solo tiene utilidad en fractura de cristales. Su ecuación es:

$$I_1 = S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 = K$$

El de Saint Venant de la deformación elástica máxima se define por

$$E \cdot e_1 = S_1 - m (S_2 + S_3) = S_{\text{rotura}}$$

Se representa por un romboedro y su sección es un rombo (Fig. A-6) en el plano S_1 S_2 y un triángulo equilátero en el plano " P_1 " normal a la diagonal del primer octante. La forma del romboedro depende del coeficiente de Poisson.

El criterio energético se define por

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - m (S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1) = K$$

Consistente en un elipsoide de revolución, que se convierte en esfera o cilindro, según el coeficiente de Poisson sea nulo o un medio.

Mucho más interés tiene el de Tresca, o de la tensión tangencial máxima.

cuya expresión completa es

$$((s_1 - s_3)^2 - 4K^2) \cdot ((s_1 - s_2)^2 - 4K^2) \cdot ((s_2 - s_3)^2 - 4K^2) = 0$$

o en la forma dada por Neuss (Ref. A-28 pág. 23)

$$4 J_2^3 - 27 J_3^2 - 36 K^2 J_2^2 + 96 K^4 J_2 - 64 K^6 = 0$$

Su representación es un prisma hexagonal, con sección recta un hexágono regular (Fig. A-7) y para tensión plana un hexágono irregular (Fig. A-6).

La regla del flujo plástico, aplicando la regla de Koiter es (Ref. A-43 pág. 146)

$$d e_1^p = 0 \qquad d e_2^p = 1 \qquad d e_3^p = -1$$

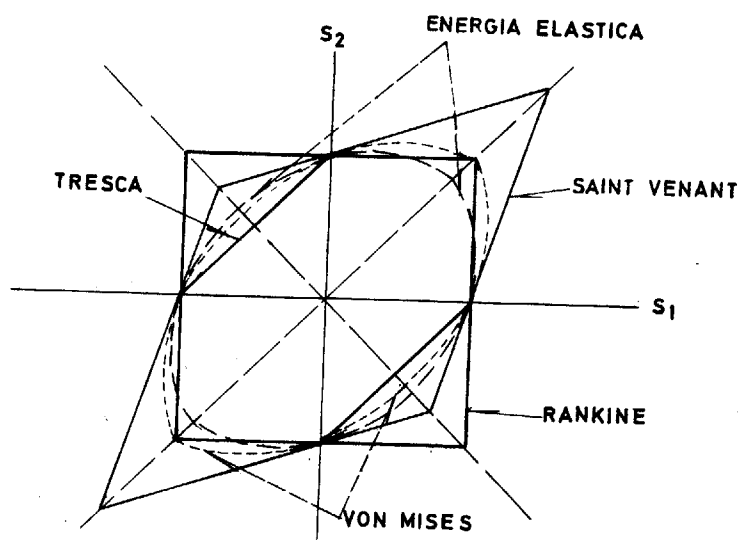


Fig. A-6

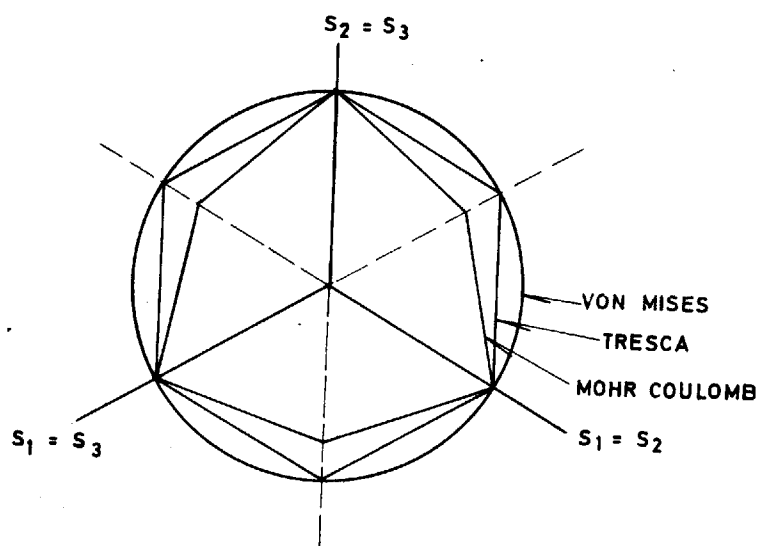


Fig. A-7

El criterio más aproximado al comportamiento de los metales es el de Von Mises

$$J_2 = K^2$$

que se representa por un cilindro de sección recta circular (Fig. A-7) y de sección por el plano $S_1 S_2$ una elipse (Fig. A-6)

Su significado físico es el de la energía de distorsión elástica máxima, y también, como indica Nadai, la tensión tangencial octaédrica máxima (Ref. A-46 pág. 20)

Al tratarse un problema de deformación plana, se corta el cilindro por el plano

$$S_3 = m(S_1 + S_2)$$

y se obtiene la elipse

$$(S_1 - S_2)^2 (1-m+m^2) + (1-2m)^2 S_1 S_2 = 3 K^2$$

En el caso particular de sólido incompresible $m = 0,5$ se obtiene la coincidencia con el criterio de Tresca (rectas de tangencia del prisma exagonal y su cilindro inscrito). Otro caso particular para el que coinciden Tresca y Von Mises en deformación plana es para los plásticos rígidos (Ref. A-28 pág. 126 ; Ref A-16 pág. 130).

La regla del flujo, denominada en este caso de Prandtl-Reuss, se reduce a

$$d e_i^p = \lambda \cdot S'_i$$

El factor de proporcionalidad " λ " puede eliminarse para los cuerpos rigidoplásticos utilizando la función de rotura (Ref. A-29 pág. 16) y para un cuerpo elastoplástico general, utilizando el incremento de trabajo " dW " (Ref. A-28 pág. 29), quedando

$$d S_i = 2 G (d e_i - dW S_i)$$

4.2. Sólidos con rozamiento

4.2.1. Sólido elástoplastico perfecto

En muchos materiales, y en especial los suelos, el punto de rotura es función de la tensión esférica a que estén sometidos, es decir el criterio de rotura depende del primer invariante de las tensiones

$$f(I_1, J_2, J_3) = K$$

El más antiguo, y sin embargo, aún el más en uso, es el de Mohr - Coulomb, definido por la ecuación

$$q = F(p) \text{ siendo}$$

$$p = \frac{S_1 + S_3}{2} \quad q = \frac{S_1 - S_3}{2}$$

El caso más simple será el de una recta, que pasará por el origen si no existe cohesión (Fig. A-8 b)

$$q = -p \operatorname{sen} \phi + C \cos \phi = -p \operatorname{tg} \psi + C \cos \phi$$

que puede escribirse también de los tres modos siguientes

$$\frac{S_1 + S_3}{2} \operatorname{sen} \phi + \frac{S_1 - S_3}{2} = C \cos \phi$$

$$S_1 (1 + \operatorname{sen} \phi) = 2 C \cos \phi + (1 - \operatorname{sen} \phi) S_3$$

$$S_3 = S_1 \operatorname{tg}^2 \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right\} - 2c \operatorname{tg} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right\}$$

Realmente el criterio completo es el producto de seis planos análogos al anterior, según Shield (Ref. A-40).

$$\left[(S_1 - S_2)^2 - (2 C \cos \phi + (S_1 + S_2) \operatorname{sen} \phi)^2 \right] \cdot \left[(S_2 - S_3)^2 - (2 C \cos \phi + (S_2 + S_3) \operatorname{sen} \phi)^2 \right] \cdot \left[(S_3 - S_1)^2 - (2 C \cos \phi + (S_3 + S_1) \operatorname{sen} \phi)^2 \right] = 0$$

Los parámetros " c " (cohesión) y " ϕ " (rozamiento) no son realmente constantes para un suelo, sino que dependen del índice de poros, de la humedad, y del ensayo que se efectúe (Ref. A-43 pág.270) entre otras cosas.

Esta función " F ", verdadero criterio de rotura y potencial plástico, cuando se trabaja en el plano de Mohr no suele usarse, (Ref. A-16 pág.295; Ref. A-26; Ref. A-43 pág. 267), sino que se utiliza en su lugar la envolvente " f " de los círculos de Mohr (Fig. A-8) que cumple la relación

$$\text{sen } \phi = \text{tg } \psi$$

y que no es la función potencial, ni cumple lógicamente la ley de la normalidad (Ref. A-26 pág. 309),

En el caso más general de que la ley $q = F(p)$ no sea rectilínea, puede darse el hecho de $\psi > 45^\circ$ y el círculo de Mohr no llega a ser tangente a la envolvente (Fig. A-8 a). Entonces la ecuación diferencial hiperbólica que gobernaría el comportamiento de un sólido plástico rígido se convierte en elíptica (Ref. A-16 pág. 296 y 301; Ref. A-28 pág. 164).

También ocurre que si la verdadera función potencial " F " tuviera puntos angulosos, la envolvente " f " sería discontinua (Ref. A-26 pág 310) (Ver Fig. A-8 c).

Las ecuaciones anteriores en el espacio de tensiones se representan por una pirámide exagonal (Ref. A-40 pág.11) de sección recta un exágono no regular (Fig. A-7) y de sección por el plano $S_1 S_2$ otro exágono (Fig. A-10) (tensión plana).

En la figura 4 se observan los ángulos que forman con la diagonal principal las aristas de un ensayo de compresión en un aparato triaxial $S_1 > S_2 = S_3$ y otro de extensión $S_1 < S_2 = S_3$.

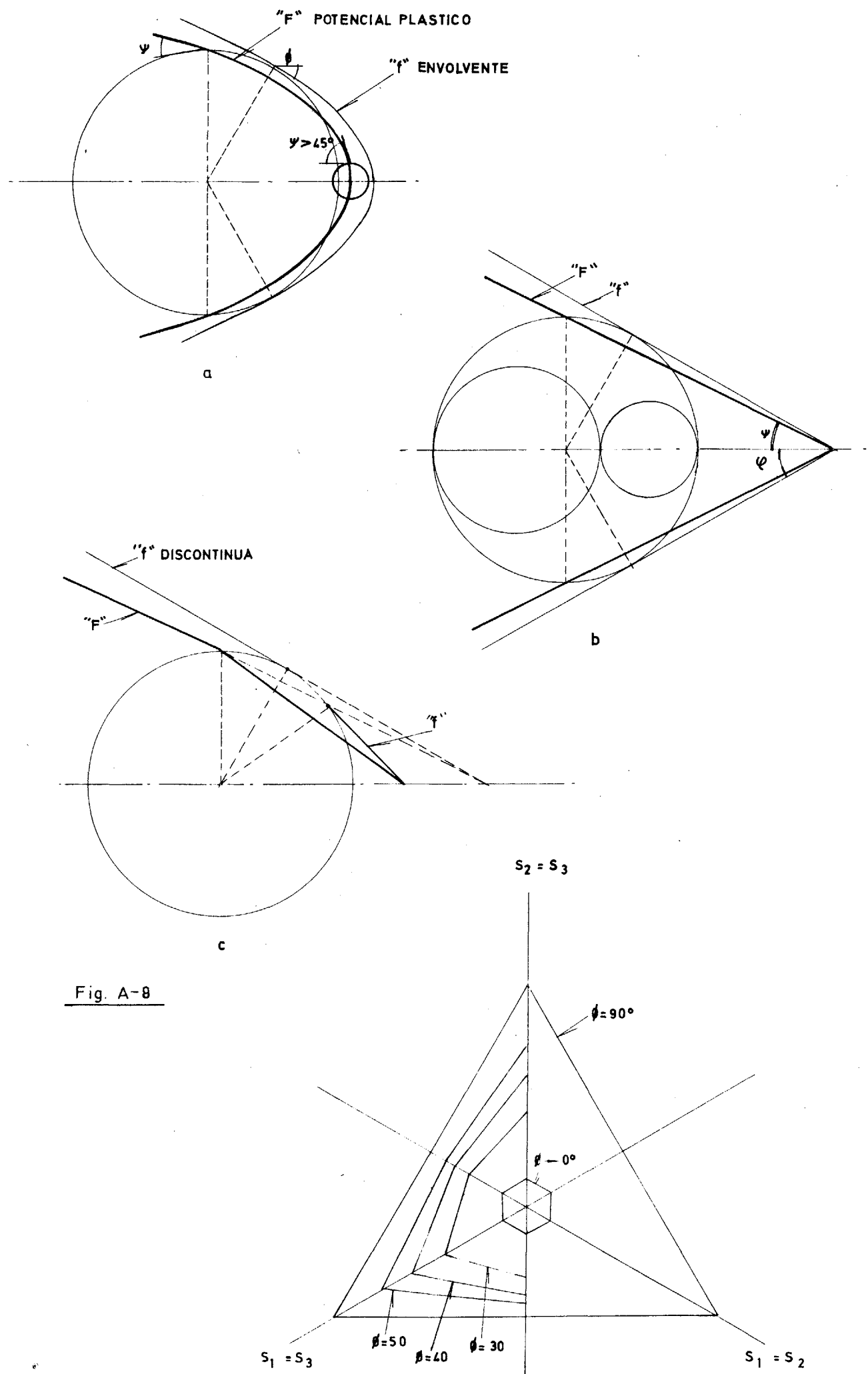


Fig. A-8

Es de observar que cuando $\phi = 0$ el criterio coincide con el de Tresca, y la sección recta tiende a ser un exágono regular. Cuando $\phi = 90^\circ$ la sección tiende a ser un triángulo equilátero (Fig. A-9) y la pirámide, con cohesión nula, coincide con el primer octante.

La ley del flujo se convierte en (Ref. A-40 pág.13)

$$de_1^p = (1 + \text{sen } \phi) \lambda$$

$$de_2^p = 0$$

$$de_3^p = (-1 + \text{sen } \phi) \lambda$$

y en una arista de la pirámide, por la generalización de Koiter

(Ref. A-18 pág.60)

$$de_1^p = (1 + \text{sen } \phi) (\lambda + \mu)$$

$$de_2^p = \mu (-1 + \text{sen } \phi)$$

$$de_3^p = \lambda (-1 + \text{sen } \phi)$$

Es de gran importancia el que el incremento plástico de volumen es positivo.

$$e = e_{ii} = 2 \cdot \lambda \cdot \text{sen } \phi$$

Otros criterios con rozamiento son las generalizaciones de los de Tresca y Von Mises, conduciendo a pirámides de sección exágono regular y circunferencia, respectivamente.

La generalización realizado por Drucker del criterio de Tresca (Ref. A-8 pág. 218) es la siguiente.

$$(S_1 - S_3) + \frac{a (\text{sen } \phi)}{3} (S_1 + S_2 + S_3) = K$$

K = función de la cohesión "c"

a = función de "sen ϕ "

Drucker propone:

$$a = \frac{\text{Sen } \phi}{3 + \text{sen } \phi}$$

$$K = \frac{3 c \cos \phi}{3 + \text{sen } \phi}$$

El exágono regular de Tresca queda así inscrito al exágono irregular de Coulomb (Fig. A-11)

En este caso la intersección de la pirámide con el plano $S_1 S_2$ difiere del de la Fig. A-6, convirtiéndose en el de la Fig. A-10

La ley del flujo se convierte en un vector

$$3 (1 + \operatorname{sen} \phi); 2 \operatorname{sen} \phi; - (3 - \operatorname{sen} \phi)$$

La generalización del criterio de Von Mises debida a Drucker y Prager (Ref. A-29 pág. 158)

$$a I_1 + \sqrt{J_2} = K$$

En deformación plana la elipse se desplaza respecto la correspondiente al caso sin rozamiento de la Fig. A-6 (ver Fig. A-10)

La ley tensión deformación, denominada de Drucker y Prager, queda

$$e_{ij}^p = \lambda \left\{ a \cdot d_{ij} + \frac{S'_{ij}}{2 \sqrt{J_2}} \right\}$$

Drucker y Prager determinan los parámetros "a" y "K" obligando a que al particularizar para un caso de deformación plana coincida con el criterio de Mohr Coulomb.

$$a = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\sqrt{9 + 12 \operatorname{tg}^2 \phi}}; \quad K = \frac{3 c}{\sqrt{9 + 12 \operatorname{tg}^2 \phi}}$$

o lo que es equivalente

$$3 a^2 = \frac{\operatorname{Sen}^2 \phi}{3 + \operatorname{Sen}^2 \phi}; \quad K = \frac{\sqrt{3} c \cos \phi}{\sqrt{3 + \operatorname{Sen}^2 \phi}}$$

La condición de deformación plana geoméricamente se expresa como intersección del cono, con dos planos determinados por la ecuación (Fig. A-11)

$$e_{33}^p = 0 \quad S' = -2a \sqrt{J_2}$$

dentro de la hipótesis de plástico rígido.

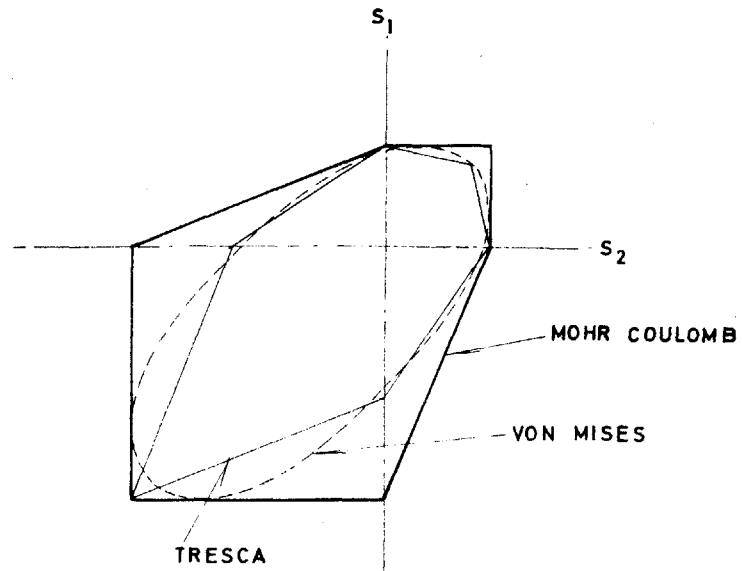


Fig. A-10

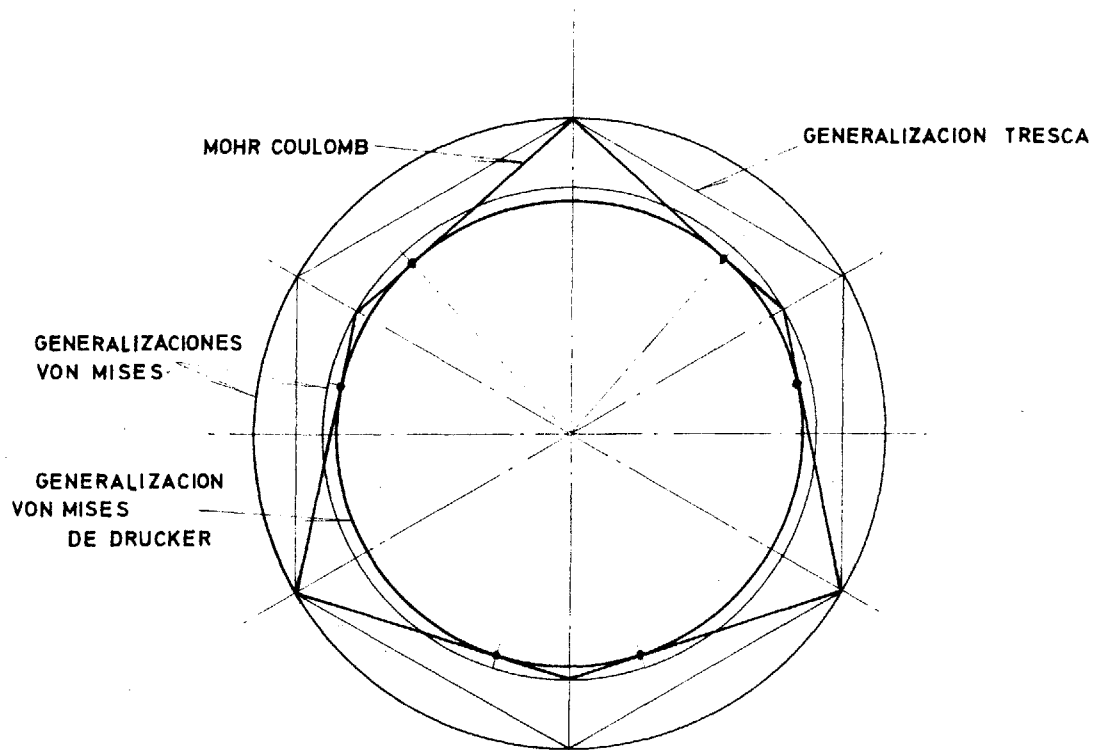
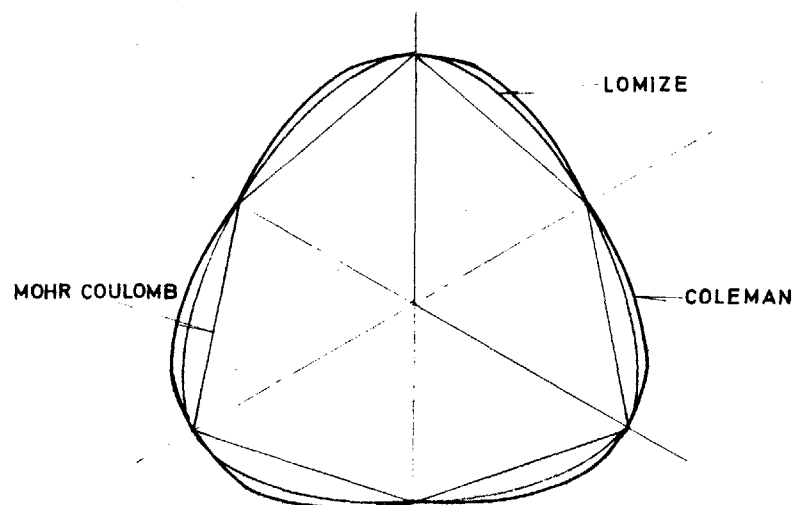


Fig. A-11



Hemos comprobado que esto equivale a obligar a que el cono sea inscrito a la pirámide exagonal de Mohr Coulomb. Por este motivo esta particularización resulta muy criticable, ya que concuerda muy mal con los resultados experimentales. Sin embargo es la que varios autores, como Reyes y Zienkiewicz - prefieren utilizar (Refs. B-41 y B-53).

Más lógica es la elección de los parámetros "a" y "K" obligando a que cono y pirámide tengan el mismo vértice, y a que la circunferencia pase por los vértices del exágono (Fig. 11).

Este procedimiento lo emplea por ejemplo Olszak (Ref. A-25 pág. 155), Bishop (Ref. A-2 pág. 101) y la mayoría de los autores.

Las dos posibilidades según el radio de la circunferencia sea

$$\frac{2\sqrt{6} \cdot c \cdot \cos \phi}{3 \pm \sin \phi}$$

conduce a los parámetros

$$a = \frac{2 \cdot \sin \phi}{(3 \pm \sin \phi) \sqrt{3}} \quad K = \frac{2c \cos \phi}{(3 \pm \sin \phi) \sqrt{3}}$$

De ellos suele tomarse el signo "menos" (círculo circunscrito).

A fin de adoptar el criterio de Mohr Coulomb a los resultados de la experimentación existente en suelos, se han propuesto numerosas generalizaciones, introduciendo la mayoría de ellas la influencia de la tensión intermedia " S_2 ".

Sin apoyo experimental ni teórico Dahl y Voight (Ref. A-6) proponen una generalización anisotrópica del criterio de Mohr Coulomb con cinco parámetros en vez de dos.

$$\sqrt{(a S_x - b S_y)^2 + 4 \cdot S_{xy}^2} + c \cdot S_x + d \cdot S_y = 4f$$

Más rigurosa e intuitiva es la teoría propuesta por Baker y Krizek (Ref. A-1) para suelos anisotrópicos transversales, que incluyen cuatro pará-

metros " C_{\min} ", " C_{\max} ", " ϕ_{\min} " y " ϕ_{\max} ", asociados con dos secciones planas "principales" del sólido, perpendiculares entre sí. Para otra sección se obtiene su cohesión y rozamiento mediante cierta ley, por ejemplo de tipo senoidal.

Las dos rectas usuales de resistencia intrínseca las sustituyen por una superficie de coordenadas polares, de modo que queda un cono de sección circular para los suelos isótropos, y de sección de huso para los anisótropos.

Suponen que la tensión principal intermedia cae en el plano principal menor, y no influye en la rotura.

Deducen que la orientación del plano de rotura depende de la de las tensiones principales si el suelo tiene $c = 0$, ó $\phi = 0$; y si se trata de un suelo general ($c \neq 0$, $\phi \neq 0$) dicha orientación depende también de la magnitud de la menor tensión principal. Confirma además la existencia de una o más zonas a través de las cuales no pueden presentarse los planos de rotura, para suelos marcadamente anisótropos.

Coleman (Ref. A-5) introduce el efecto de la tensión intermedia, buscando la expresión más simple de los invariantes de tensiones que pase por los 6 vértices del exágono de Coulomb (Fig. A-12)

$$\left\{ \frac{2 I_1}{3} + \sqrt[3]{\frac{J_3}{2}} \right\}^2 \cdot \sin^2 \phi + 3 J_2 = 0$$

tiene el defecto de no resultar convexa, y por lo tanto no cumplirá la condición de estabilidad de Drucker.

Lomize establece la relación (Ref. A-21)

$$\frac{J_2}{I_1} \left\{ \frac{I_1^3}{I_3} \right\}^m = \text{cte.}$$

donde "m" lo deduce de sus experimentos (entre 0,12 y 1,73), y que para "m=0" coincide con la generalización de Von Mises.

Malyshev basándose en el hecho de que las líneas de rotura no son rectas limpias, sino quebradas con una dispersión de un ángulo "d" respecto al plano medio, propone la ley (Ref. A-22)

$$\sum A_{ij} S_i S_j = C (A_1 S_1 + A_2 S_2 + A_3 S_3) + C^2$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

donde "A_{ij}" son funciones definidas de "φ" y "d". Para "d=0" coincide con Mohr- Coulomb.

Drucker ha propuesto la modificación de las generalizaciones de Tresca y Von Mises a base de cortar el cono y la pirámide por los planos normales denados de modo que el sólido no resista tracciones (Ref. A-8 pág. 218); así como también limitar la compresión máxima, de modo que el cono se cierre con un casquete esférico (Ref. A-10 pág. 343).

4.2.2. Sólidos rigidizables con rozamientos.- "Cam Clay".

Se conoce desde hace tiempo el fenómeno de la consolidación de los suelos arcillosos, y que es en realidad un proceso de rigidización, análogo al estirado en frío de los aceros.

Shield propuso (Ref. A-18) como criterio de rotura la pirámide hexagonal de Mohr-Coulomb cortada por una base plana, admitiendo una expansión de dicha función de rotura manteniendo el ángulo " ϕ " y creciendo la cohesión " c " y alejándose a la vez la base plana (Fig. A-13)

Anteriormente había propuesto Drucker (Ref. A-10), el romper el cono de Von Mises por un casquete esférico en lugar de con una base plana, y expandiendo la función de rotura a base de alargar el cono alejando el casquete esférico, pero manteniendo " c " y " ϕ " constantes (Fig. A-14).

Estas primeras sugerencias han sido muy elaboradas y perfeccionadas en Cambridge por Roscoe y sus colaboradores, que han creado un modelo matemático de suelo conocido con el nombre de Cam Clay, contrastándolo y apoyándolo con una extensa y refinada experimentación con arcilla normalmente consolidada y ligeramente preconsolidada.

Admiten la existencia de potencial plástico y su coincidencia con la función de rotura, y por lo tanto la regla de la normalidad.

Como criterio de rotura aceptan el de Von Mises (Ref. A-32 pág. 566 y 606), (aunque primitivamente escogieran el de Von Mises generalizado, Ref. A-31 pág. 214). El casquete esférico de Drucker lo sustituyen por otra superficie que también es convexa y expande con el trabajo plástico realizado.

El estado del suelo se puede representar por un punto en el diagrama $p - q - e$

e = índice de poros

p = presión media = $(S_1 + S_2 + S_3) / 3$

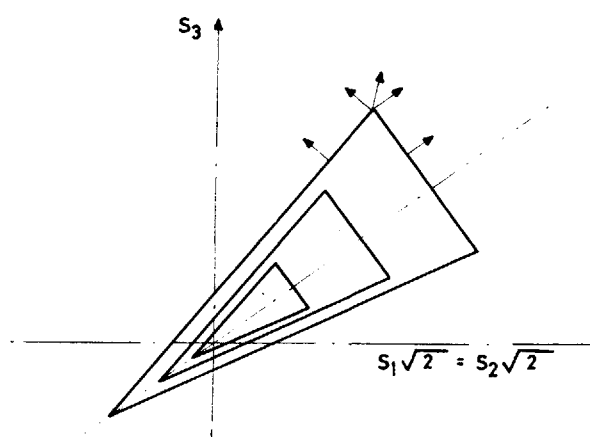


Fig. A-13

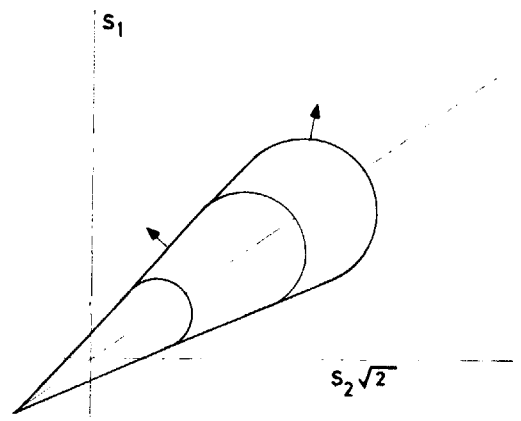


Fig. A-14

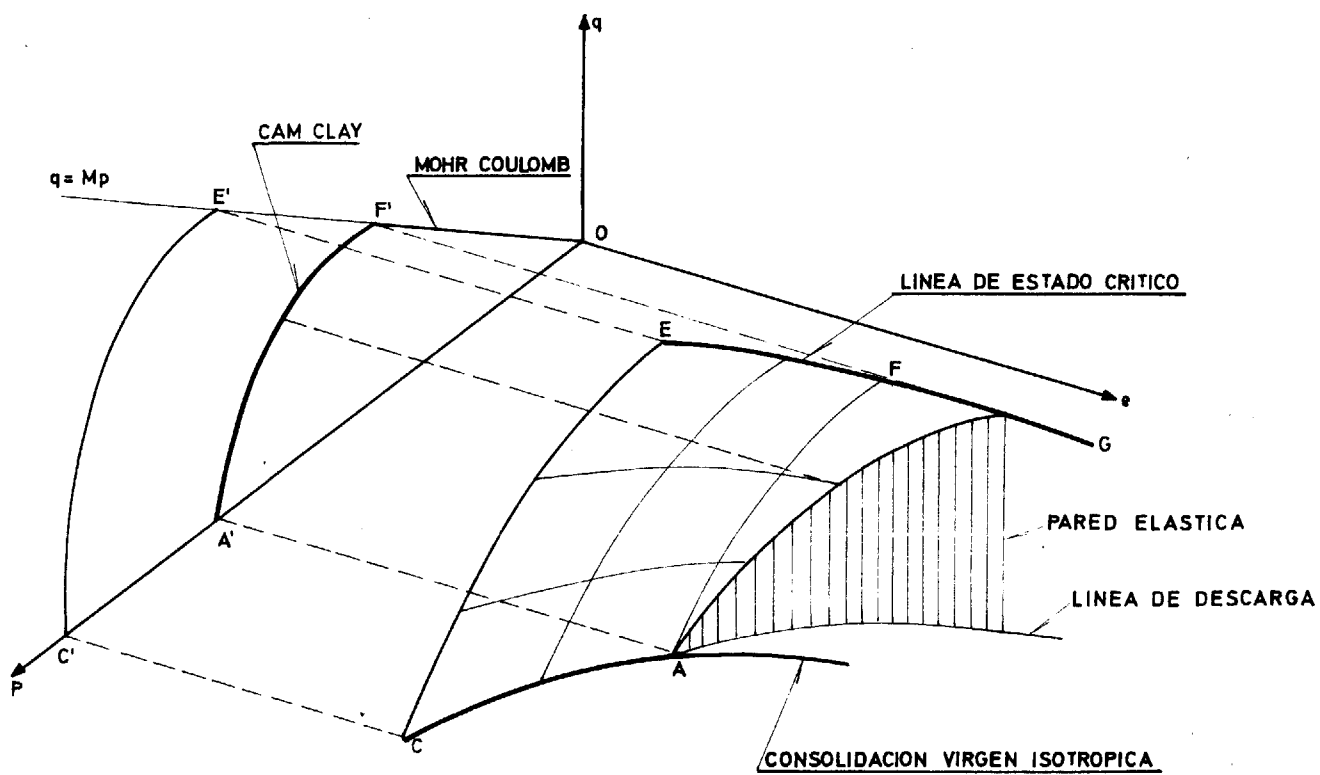


Fig. A-15

$$q = \text{desviador} = S_1 - S_3$$

$$n = p / q$$

El suelo se define tan sólo por tres parámetros $M - L - K$

$$M = \text{pendiente de la recta de resistencia intrínseca} = \frac{6 \text{ sen } \phi}{3 - \text{sen } \phi}$$

L = índice de compresión de la arcilla

K = índice de entumescimiento

Las trayectorias de un ensayo triaxial están en una superficie denominada de "frontera" de los estados "posibles", por encima de la cual no puede existir un estado real. Dicha superficie queda limitada por la línea de estado crítico (Fig. A-15) que se proyecta en el plano $p - q$ en la recta de resistencia intrínseca $q = M \cdot p$

Las ecuaciones de consolidación de Terzaghi

$$e = e_a - L \log_e P$$

quedan proyectadas en el plano " $e - \log P$ " es decir, en el plano " $q = 0$ ", por un haz de rectas paralelas. De ellas la más alejada del origen corresponde a la consolidación virgen isotrópica que es la intersección del plano $q = 0$ con la superficie de frontera. La más próxima al origen es la proyección de la línea de estado crítico, y las intermedias corresponden a consolidaciones anisotrópicas, en que el aumento de tensiones principales se hace en una relación fija - " $n = \text{cte}$ ".

La línea de descarga

$$e = e_p - K \log_e P$$

representa las deformaciones " e " elásticas o recuperables, y con ella se llega a los puntos interiores que corresponden a estados preconsolidados.

Cuando la "Cam Clay" ha alcanzado una presión máxima " p " en su historia la línea de estado crítico FG se completa con la AF (proyectados en $F'O$ y $A'F'$ en el plano $p - q$) (Fig. A-15). Con una mayor consolidación se pasa a la $CEFG$ (proyectado en $C'E'F'O$ que es homotética de la anterior) (Ref. A-32 pág.

Esta nueva línea de estado crítico, que en el espacio de ejes $S_1 - S_2 - S_3$ cierra la pirámide de Mohr Coulomb, tiene por ecuación (obtenida por consideraciones energéticas, Ref. A-34):

$$n = p/q = M \log_e \frac{P_0}{P}$$

y su forma es apuntada, con un punto singular anguloso en el eje (Fig. A-15 punto A').

Posteriormente se ha desarrollado la "Cam Clay modificada" en que se sustituye la anterior superficie por un elipsoide de revolución (Fig. A-16) de ecuación (Ref. A-32 pág. 549)

$$\frac{P}{P_e} = \frac{M^2}{M^2 + n^2}$$

que concuerda mejor con la experimentación. Para ello Burland ha sustituido la expresión de la energía

$$dW^p = S_i de_i$$

por

$$dW^p = \sqrt{(de_1 + de_2 + de_3)^2 + \frac{M^2}{q} (2de_1 - de_2 - de_3)^2}$$

Por último se ha reformado el modelo en la "Cam Clay modificada y revisada". El motivo de ello es que la experimentación muestra (Ref. A-32 pág. 550) que efectivamente existe la anterior función de rotura para deformaciones volumétricas, pero no en lo relativo a las distorsiones, pues mucho antes de alcanzarse el estado crítico, siendo todas las deformaciones volumétricas recuperables, aparecen ya deformaciones angulares plásticas.

Para solucionarlo se ha añadido una nueva línea de rotura, que para que cumpla también la ley de la normalidad debe ser paralela al eje "P" (Fig. A-17), y que es asimismo rigidizable. Para trayectorias tales como la BD existe una rigidización del segmento CE hacia el C'E' que como máximo llegaría al punto F, y sólo se produce distorsión plástica (que puede calcularse en función de la pendiente "n" de OC). Una trayectoria como la BG produciría una rigidi-

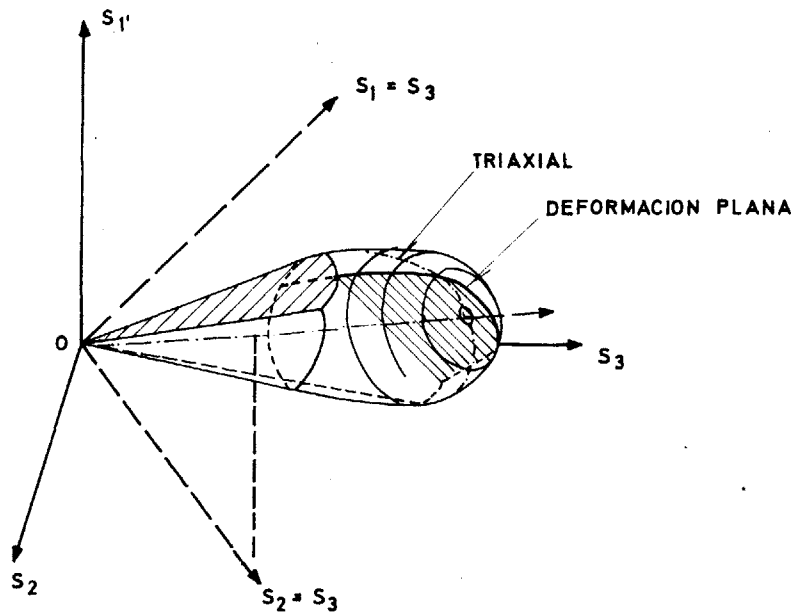


Fig. A-16

PRISMA DE MOHR COULOMB CON ELIPSOIDE
DE LA CAM CLAY MODIFICADA

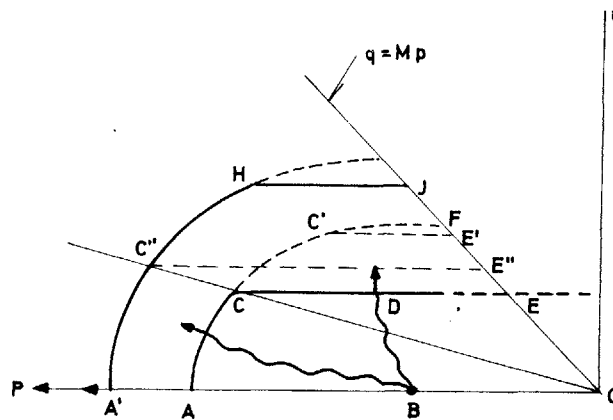


Fig. A-17

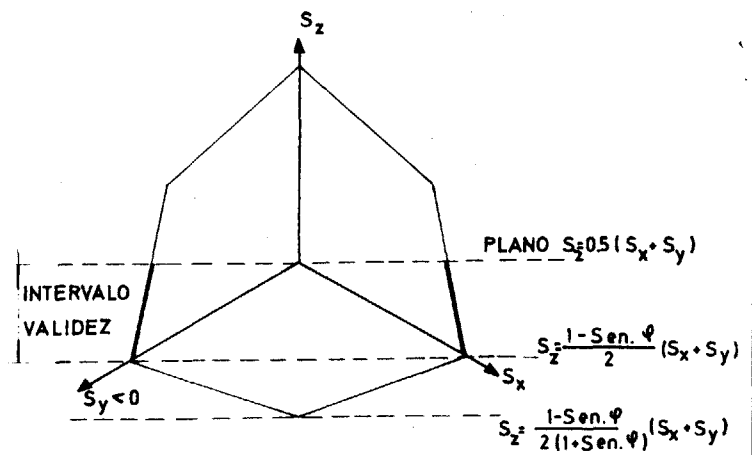
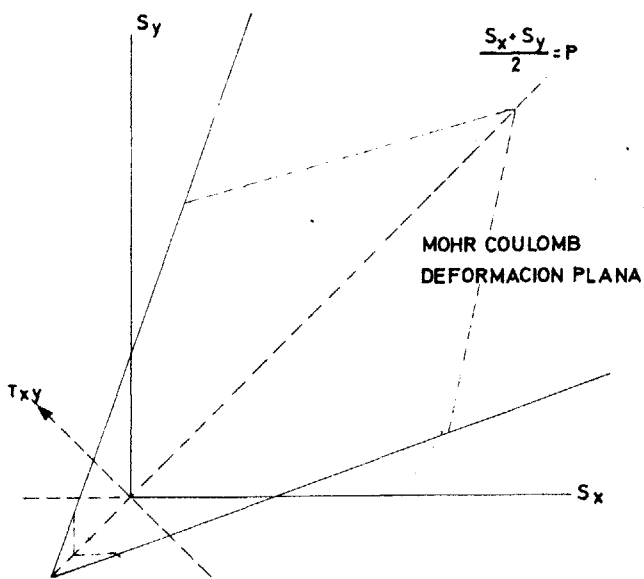


Fig. A-19

zación según la Cam Clay modificada, hasta la línea A'C''E''; con deformaciones plásticas volumétricas y angulares que pueden calcularse según dicha teoría. Si la trayectoria pasa por " C ", punto singular de Koiter, y está dirigida entre las normales a las dos ramas de la función de rotura, se produce una rigidez doble hacia A'HJ y los incrementos de deformación plástica son combinación de los anteriores.

El problema de deformación plana ha sido estudiado también por Roscoe y Burland particularizando las relaciones incrementales tensión deformación para este caso en la hipótesis de plástico rígido (deformación elástica nula, $k = 0$). La línea crítica es una elipse, intersección del elipsoide con un plano conjugado con la dirección del corrimiento impedido (Fig. A-16); dicha elipse en general no pasará por el vértice del elipsoide y en general en un terreno real en estado de deformación plana no se puede alcanzar la condición de consolidación isotrópica.

4.3. Sólidos sin potencial plástico

Los criterios anteriormente expuestos fallan al contrastarlos experimentalmente, esencialmente debido a que la dilatación o incremento de volumen relativo es en la realidad menor a la predicha. Para solventar este inconveniente hay dos posibilidades: una es modificar los criterios de rotura conservando la teoría plástica como se expuso anteriormente, y uno de sus frutos fué la Cam-Clay de Roscoe y sus colaboradores. La otra es mantener Mohr Coulomb u otro criterio y romper con las hipótesis hechas; ello implica rechazar la ley de la normalidad que era una consecuencia lógica del criterio de estabilidad de Drucker (pág.12), pero se recuerda que Mandel demostró (Ref. A-23) que dicho criterio es suficiente pero no necesario para materiales con rozamiento.

Dentro de esta segunda posibilidad Haythornwaite (Ref. A-14), Geniev, Shunsuke Takagi (Ref. A-41), Josseling de Jong (Ref. A-19) y Mandl y Fernández Luque (Ref. A-24) rompen la hipótesis de Saint Venant de coincidencia de ejes de los elipsoides de tensiones e incrementos de deformaciones (denominada "isotropía", aunque Mandl afirma que la no coaxialidad es compatible con el verdadero concepto físico de isotropía). Según los últimos autores en un terreno granular no dilatan en deformación plana el ángulo entre ambos elipsoides es $\pm \phi / 2$, y de las características de velocidades una coincide con la de tensiones y la otra no; según Josseling de Jong el ángulo entre elipsoides puede tomar cualquier valor intermedio a $\pm \phi / 2$ y coinciden ambas características.

Otro camino es abandonar directamente la regla de la normalidad y la suposición de la existencia de un potencial plástico, punto que según Scott (Ref. A-35 pág. 16) no está claro aún. Geiringer (1.930) afirma que el plano de rotura no es aquel en que la movilización de " ϕ " sea máxima, sino el plano en que existe discontinuidad de deformaciones, como es lógico, y este plano se demuestra que coincide con una línea de extensión cero y con una característica del campo de ve

locidades. Shield (1.953, Ref. A-38) extendió la teoría a un material con rozamiento " ϕ " obteniendo sus ecuaciones diferenciales, suponiendo que dichas características de velocidades coincidían con las de tensiones, según indica el criterio de Mohr Coulomb.

Bent Hansen (1.958, Ref. A-15) da un paso más, faltando ya a la ley de la normalidad: señaló que en principio no tienen por que coincidir ambas familias de características, lo cual conduce en definitiva a que el ángulo de dilatación " v " sea diferente del ángulo de rozamiento interno " ϕ ". Los planos de rotura formarán con las direcciones principales de deformación un ángulo de $45^\circ \pm v/2$ en lugar de formar $45^\circ \pm \phi/2$ con las tensiones principales.

Pariseau (1.966, Ref. A-26) vuelve sobre el tema, recalca el significado de dilatación del ángulo " v " y expresa las relaciones tensión-deformación en dos dimensiones para este tipo de material plástico-rígido de $v \neq \phi$.

Bransby (Ref. A-4) es el primero en aplicar este modelo matemático de terreno plástico rígido de rozamiento " ϕ " constante y dilatación " v " también constante, mediante la teoría de las líneas características. Contrastando los resultados con ensayos en modelo reducido, llega a la conclusión de que los campos de velocidades obtenidos no concuerdan en detalle con la solución exacta, en primer lugar porque no ha considerado las ecuaciones de equilibrio, y en segundo lugar porque en el modelo reducido " ϕ " y " v " son variables; no obstante hay un acuerdo cualitativo notable, en especial en lo relativo a las deformaciones, y menor en lo relativo a tensiones.

A. Serrano, con la colaboración de J. Martínez, ha desarrollado una generalización del método de cálculo de las características en que tiene en cuenta la compatibilidad de deformaciones mediante las ecuaciones del campo de velocidades, y el equilibrio gracias a las ecuaciones del campo de tensiones. Además considera variable " ϕ " y " v " según leyes obtenidas experimentalmente. Este método puede definirse como el óptimo o más perfecto dentro de las hipótesis estableci

5. APLICACION A LA MECANICA DEL SUELO

5.1. Discusión

Los criterios de plasticidad se crearon en principio para materia les diferentes de los suelos, y poco a poco se van adaptando a éstos. De los criterios clásicos el que más se asemeja a la realidad es la pirámide exagonal irregular de Mohr Coulomb.

Los criterios de Tresca y Von Mises generalizados con rozamiento tienen una contradicción teórica señalada por Bishop (Ref. A-2 y A-3), y es que para $\phi = 36,9^\circ$ el cono correspondiente es tangente a los tres planos coordenados, y para valores mayores de " ϕ " existirían zonas elásticas sin rotura estando el sólido traccionado, lo cual no tiene posibilidad física en un material granular.

Este defecto teórico no se da en Mohr Coulomb, pues al tender " ϕ " a 90° el prisma hexagonal llega a coincidir con el triedro de ejes (Fig. A-9). Además de ello la experimentación acumulada, tanto en arcillas como en arenas, indica una sección recta de la función de rotura del aire de la ley de Lomize (Fig. A-12) que se parece esencialmente más a Mohr Coulomb que al círculo de Von Mises, aunque denota una pequeña influencia de la tensión principal intermedia (Ref. A-35).

El único gran defecto de Mohr Coulomb es por tanto que predice una dilatancia excesiva, obligando a que el plano de rotura sea una característica de tensiones (Ref. A-33, pág. 165).

Ello se solventa manteniendo dicha función de rotura, pero cambiando la ley de la normalidad y la ley tensión-deformación del modo indicado en los apartados 4.3. y 5.2. Con ello la dilatancia depende de un nuevo parámetro " v " característico del material e independiente de " ϕ ".

Mandl y Fernández Luque añaden dos falsos nuevos defectos a Mohr Coulomb (Ref. A-24 pág. 282). El segundo consiste en que la disipación de energía toma el valor

$$c \cdot \operatorname{ctg} \phi (e_1 - e_3)$$

y cuando " $c = 0$ " resulta un trabajo nulo, lo cual es falso. Parisseu (Ref. A-26, pág 316) explica este fenómeno indicando que se obtiene un trabajo nulo gracias a que la componente normal, debido a la dilatación, da trabajo negativo igual y contrario al desarrollado por los esfuerzos tangenciales (realmente el trabajo no debía ser una suma algebraica, sino la suma de los valores absolutos de los productos de fuerzas por desplazamientos, ya que un sistema friccional se opone intrínsecamente al movimiento, tanto si dilata como si contrae). Este segundo defecto es por tanto consecuencia del primero, de la dilatación, y efectivamente en el modelo propuesto con $v \neq \phi$ la disipación de energía vale

$$(e_1 - e_3) \frac{c \cos \phi + (S_1 + S_2) (\operatorname{sen} v - \operatorname{sen} \phi)}{\operatorname{sen} \phi}$$

que no llega a anularse cuando $c = 0$.

Por último Mandl señala la no coincidencia de los planos característicos que forman ángulos de $45^\circ \pm \phi/2$ con la tensión principal, con los planos característicos de velocidades de un material incompresible, que van a 45° . Esto es de nuevo consecuencia también del único defecto señalado.

Respecto a la zona de equicompresión puede decirse que la "Cam Clay modificada", cerrando la pirámide de Mohr, ha supuesto una gran incorporación a la plasticidad aplicada a los suelos arcillosos. Queda como desarrollo futuro de esta tesis la incorporación de dicha teoría al programa de cálculo electrónico confeccionado, tanto para el estudio de taludes, como para otros problemas.

Para arena el estado actual de nuestros conocimientos está más atrasado, siendo la teoría de Rowe, la "Grant Gravel" de Schoffield (Ref. A-37) y los

modelos no potenciales de Serrano los más prometedores.

Por último queda prácticamente en blanco el tema de las arenas densas y las arcillas preconsolidadas, que rompen con una resistencia de pico o punta para bajar luego con grandes deformaciones a una resistencia residual mucho menor. Físicamente se explica ésto como un desengrane de las partículas de arena, que mediante esa dilatación fuertemente positiva bajan su densidad para convertirse en arena suelta menos resistente. En teoría de plasticidad este tipo de terreno es "reblandecible" (pág. 12) y no cumple el principio de estabilidad de Drucker, por lo que su tratamiento matemático es mucho más complejo y no ha sido acometido con éxito hasta el día de hoy.

Debe reconocerse sin embargo, lo lejos que se está aún de una explicación satisfactoria del comportamiento del suelo, pues se han dejado a un lado variables tan influyentes como son la viscosidad, las discontinuidades y heterogeneidades del suelo, las grandes deformaciones, la elasticidad no lineal tan marcada en las arcillas blandas (Kondner) y la anisotropía (Ref. A-27). Estas dos últimas por sí solas ya explican muchos fenómenos sin necesidad de recurrir a la plasticidad.

5.2. Relaciones incrementales tensión deformación propuestas

Se ha escogido como más adecuado para su empleo en esta tesis el criterio de rotura de Mohr Coulomb, con las leyes tensión-deformación propuestas por Parisseau para problemas planos, las cuales se han desarrollado completamente para cuerpos elastoplásticos perfectos.

Estas leyes mantienen aún una relativa simplicidad que las hace -abordables por el ordenador electrónico, y tienen como limitación o hipótesis simplificativa el que el rozamiento " ϕ " y la dilatación " v " deben ser fijos durante el proceso de carga.

El modelo matemático es por tanto análogo al empleado por Bransby (Ref. A-4) superándole por tener en cuenta el equilibrio de tensiones además de la compatibilidad de deformaciones, y por considerar el suelo elastoplástico en vez de plástico rígido.

El criterio de rotura de Mohr Coulomb en el espacio se indicó (pág. 21) es un prisma exagonal irregular. Su intersección con el plano $S_3 = 0$ (tensión plana) es un exágono (Fig. A-10 pág. 27). La intersección con el plano

$$S_3 = m (S_1 + S_2)$$

que es el caso de deformación plana, da un exágono muy alargado (Fig. A-18), que cuando el plano anterior pasa por el vértice del prisma (si $m = 0,5$; ó si $c = 0$) degenera en dos rectas en ángulo agudo.

$$\left| \frac{S_1 - S_2}{2} \right| + \frac{S_1 + S_2}{2} \operatorname{sen} \phi = c \cos \phi$$

que equivalen a

$$+ \sqrt{\left\{ \frac{S_x - S_y}{2} \right\}^2 + t_{xy}^2} + \frac{S_x + S_y}{2} \operatorname{sen} \phi = c \cos \phi$$

Dichas rectas cuando " $c = 0$ " son válidas en elastoplasticidad para un coeficiente de Poisson $m \geq \frac{1 - \sin \phi}{2}$; si es " m " menor la intersección será la del plano anterior con otros dos de los planos del prisma exagonal (Fig. A-19 y A-4 pág. 16). Si es " $c \neq 0$ " el intervalo de validez de " m " es aún mayor, aunque dicha validez depende también de la presión media.

TABLA I
=====

ϕ	$m \geq (1 - \sin \phi) / 2$
0°	0,5
15°	0,371
20°	0,329
25°	0,288
30°	0,25
35°	0,214
45°	0,146
90°	0,0

Pasemos a la obtención del vector de incremento de deformación $\Delta \epsilon$. Dicho vector tiene tres grados de libertad: el módulo y dos cosenos directores. El primero se deduce a partir de la función de rotura o del incremento de t_{ya} bajo plástico realizado. Los cosenos directores quedan definidos por la regla de la normalidad.

Si se suprime la existencia del potencial plástico quedan libres los dos últimos grados de libertad o parámetros. Uno de ellos puede determinarse - obligando a que la dilatación sea prefijada, pero el otro, en un problema general de tres dimensiones queda sin definir.

Sin embargo la condición de deformación plana permite fijar ese último parámetro. La ecuación a aplicar sería:

Dicha ecuación es sumamente compleja, pero existe la feliz coincidencia de que al utilizar el criterio de Mohr Coulomb se verifica a la fuerza $e_z^p = 0$, se trate o no de un problema de deformación plana, con lo cual esa última condición se cumple automáticamente sin nuevas complicaciones matemáticas.

En la pág. 20 se vió cuando coinciden en deformación plana los criterios de Tresca y Von Mises, y en la pág. 26 cuando coinciden Mohr Coulomb y la generalización de Drucker de Von Mises. Dichas coincidencias radican precisamente en obligar en el círculo de Von Mises que la normal cumpla $e_z^p = 0$ y por tanto se obtiene la tangencia de dicho círculo con el exágono de Tresca o Mohr Coulomb.

En esto se ve una nueva desventaja al criterio de Von Mises. En deformación plana se trabaja con dos generatrices del cono para las que el coeficiente de Poisson " μ " es mayor a 0,5 (ver Fig. A-10) lo cual sólo tiene sentido físico para un cuerpo plástico rígido, a no ser que se obligue a cumplir la complicada ley $e_z^p + e_z^e = 0$.

Por el contrario las relaciones de Drucker y Prager aplicadas al criterio de Mohr Coulomb, son lícitas en elastoplasticidad para valores del coeficiente de Poisson mayores a los de la tabla I, que son los usuales en la práctica.

El vector de incremento de desplazamiento \vec{e} vendrá definido por lo antes dicho por los dos parámetros " λ " y " μ ".

$$e_1^p = \lambda (1 + \sin \phi) ; \quad e_2^p = \mu (-1 + \sin \phi) ; \quad e_3 = 0 = e_3^p = e_3^e$$

y al ser $\lambda \neq \mu$ no se cumple la ley de la normalidad.

Pasando a unos ejes cualesquiera

$$e_x^p = \frac{e_1 + e_2}{2} + \frac{e_1 - e_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$e_y^p = \frac{e_1 + e_2}{2} - \frac{e_1 - e_2}{2} \cos 2a$$

$$e_{xy}^p = \frac{e_1 - e_2}{2} \sin 2a$$

Efectuando el cambio de parámetros

$$\begin{aligned} \lambda'(1 + \sin \phi) + M'(-1 + \sin \phi) &= 2\lambda\alpha \\ \lambda'(1 + \sin \phi) - M'(-1 + \sin \phi) &= 2\lambda \end{aligned} \quad \text{o sea} \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda' &= \frac{1 + \alpha}{1 + \sin \phi} \lambda \\ M' &= \frac{1 - \alpha}{1 - \sin \phi} \lambda \end{aligned} \right.$$

Resultan la expresión de las relaciones tensión-deformación de Pariseau (Ref. A-26, pág 313)

$$e_x^p = \frac{\lambda}{4G} (\alpha + \cos 2a)$$

$$e_y^p = \frac{\lambda}{4G} (\alpha - \cos 2a)$$

$$e_{xy}^p = \frac{\lambda}{2G} \sin 2a$$

siendo:

$$\cos 2a = \frac{s_x - s_y}{2\sqrt{J_2}}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

El incremento de volumen es:

$$e^p = e_x^p + e_y^p = \frac{\lambda}{2G} \alpha$$

Luego el parámetro " α " es la dilatación "sen v "

Para sen $v = \sin \phi$ se tienen las relaciones de Drucker y Prager (Ref. A-7) pues se cumple la ley de la normalidad.

Si el cuerpo es elastoplástico, sumando los incrementos de deformación elásticos en deformación plana se llega a:

$$2G \Delta e_x = \Delta S_x (1-m) - m \Delta S_y + \frac{\lambda}{2} \left\{ \alpha + \frac{S_x - S_y}{2 \sqrt{J_2}} \right\}$$

$$2G \Delta e_y = \Delta S_y (1-m) - m \Delta S_x + \frac{\lambda}{2} \left\{ \alpha + \frac{S_x - S_y}{2 \sqrt{J_2}} \right\}$$

$$2G \Delta e_{xy} = 2 \Delta t_{xy} + \lambda \frac{\Delta t_{xy}}{\sqrt{J_2}}$$

Las dos primeras ecuaciones pueden transformarse en:

$$2G (\Delta e_x - \Delta e_y) = \Delta S_x - \Delta S_y + \lambda \frac{S_x - S_y}{2 \sqrt{J_2}}$$

$$2G (\Delta e_x + \Delta e_y) = (\Delta S_x + \Delta S_y) (1 - 2m) + \lambda \alpha$$

Diferenciando la función de rotura se tiene

$$\Delta J_2 = \frac{(S_x - S_y)}{2} (\Delta S_x - \Delta S_y) + 2 t_{xy} \Delta t_{xy} = - \sqrt{J_2} \sin \phi (\Delta S_x + \Delta S_y)$$

Despejando ΔS_x e ΔS_y del sistema anterior y entrando en la última ecuación se puede determinar el valor del parámetro " λ "

$$\lambda = \frac{2G}{\sqrt{J_2} (1 - 2m + \alpha \sin \phi)} \left\{ \left(t_{xy} \Delta e_{xy} + \frac{S_x - S_y}{2} (\Delta e_x - \Delta e_y) \right) (1 - 2m) + \sqrt{J_2} \sin \phi (\Delta e_x + \Delta e_y) \right\}$$

Entrando con dicho valor de " λ " en las expresiones antes obtenidas de Δe , y resolviendo el sistema en S se llega a las relaciones tensión deformación, que se expresan matricialmente del modo

$$\Delta \vec{S} = (D) \Delta \vec{e}$$

(Ver apéndice B, pág. 10)

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{pmatrix}$$

$$D_{11} = 1 + \frac{1}{B} - \frac{\sin \phi + \sin \nu}{2 B \sqrt{J_2}} (s_x - s_y) - \frac{1 - 2m}{B J_2} \left(\frac{s_x - s_y}{2} \right)^2$$

$$D_{22} = 1 + \frac{1}{B} + \frac{\sin \phi + \sin \nu}{2 B \sqrt{J_2}} (s_x - s_y) - \frac{1 - 2m}{B J_2} \left(\frac{s_x - s_y}{2} \right)^2$$

$$D_{12} = -1 + \frac{1}{B} - (s_x - s_y) \frac{\sin \phi - \sin \nu}{2 B \sqrt{J_2}} + \frac{1 - 2m}{B J_2} \left(\frac{s_x - s_y}{2} \right)^2$$

$$D_{21} = -1 + \frac{1}{B} + (s_x - s_y) \frac{\sin \phi - \sin \nu}{2 B \sqrt{J_2}} + \frac{1 - 2m}{B J_2} \left(\frac{s_x - s_y}{2} \right)^2$$

$$D_{33} = 1 - \frac{1 - 2m}{B J_2} t_{xy}^2$$

$$D_{13} = - t_{xy} (s_x - s_y) \frac{1 - 2m}{2B J_2} - \frac{t_{xy} \sin \nu}{B \sqrt{J_2}}$$

$$D_{31} = - t_{xy} (s_x - s_y) \frac{1 - 2m}{2B J_2} - \frac{t_{xy} \sin \phi}{B \sqrt{J_2}}$$

$$D_{23} = + t_{xy} (s_x - s_y) \frac{1 - 2m}{2B J_2} - \frac{t_{xy} \sin \nu}{B \sqrt{J_2}}$$

$$D_{32} = + t_{xy} (s_x - s_y) \frac{1 - 2m}{2B J_2} - \frac{t_{xy} \sin \phi}{B \sqrt{J_2}}$$

$$B = 1 - 2n + \sin \phi + \sin \psi$$

$$G = \frac{B}{2(1+n)}$$

Observese que la matriz no es simétrica, debido a la inexistencia de potencial plástico (Ref. A-11, pág. 98), por no cumplirse la ley de la normalidad.

En el caso particular $\sin \phi = \sin \psi$ la matriz es simétrica, y resultan las relaciones de Drucker y Prager ya obtenidas por Lorente de No. (Ref. 18).

Apéndice B

ELEMENTOS FINITOS



METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

APENDICE B

I N D I C E

	Pág.
1.- Generalidades	3
2.- Fundamento teórico	
2.1.- Hipótesis y método	5
2.2.- Formulación	8
2.3.- Equivalencias del método	15
3.- Convergencia y unicidad.	19
4.- Aplicación del método.	
4.1.- Tipos de elementos.	
4.1.1.- Problemas planos	26
4.1.2.- Problemas tridimensionales	37
4.2.- Condiciones de contorno	39
4.2.1.- Introducción de las condiciones de contorno	
4.2.2.- Prescripción de corrimientos.	41
4.3.- Resolución del sistema. Particiones.	45
5.- Introducción de la plastificación.	
5.1.- Generalidades	50
5.2.- Método incremental de la matriz de rigidez tangente.	55
6.- Programa de cálculo electrónico	59
6.1.- Variables escogidas.	60
6.2.- Organigrama	64
6.3.- Manejo del programa.	67

APENDICE - B -METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOSB-1) Generalidades.

El problema de comportamiento de un sólido ante una serie de fuerzas que lo solicitan, representado por un sistema de ecuaciones diferenciales, solo puede resolverse mediante expresiones analíticas en contados casos, resultanto por tanto necesario recurrir a métodos numéricos aproximados.

La aplicación de estos procedimientos numéricos ha dado hoy día un salto discontinuo merced al desarrollo del cálculo electrónico, al cual se acude no solo por la imposibilidad de la obtención de la solución exacta del problema, sino porque ésta, ya obtenida, resulta en muchos casos inmanejable dada su complejidad.

Un perfeccionamiento de los métodos de diferencias finitas lo constituye la discretización del continuo en elementos finitos, de modo que en las características de los mismos (matriz de rigidez) se introduce ya una integración parcial de las ecuaciones diferenciales. El resultado, un sistema de ecuaciones lineales, converge hacia la solución exacta al disminuir el tamaño de los elementos, y converge de un modo más rápido que con la aplicación de diferencias finitas.

Otras ventajas de este método de elementos finitos respecto las diferencias finitas son, según apunta Zienkiewicz, su principal expositor (Ref. B-52, pág. 160), la facilidad con que se introduce la anisotropía y la no homogeneidad, la posibilidad de cambiar la forma y tamaño de los elementos adaptándolos a contor-

nos cualesquiera y a variaciones rápidas de la función buscada.

Este método fué ideado a partir de los de cálculo matricial de estructuras (Ref. B-46) y enfocado primeramente para la resolución de problemas elásticos, facilitándose con él el estudio de sólidos heterogéneos, anisótropos y de forma compleja. Posteriormente se ha perfeccionado y generalizado en varios sentidos: extendiéndolo desde el método de las deformaciones al método de las tensiones (Ref. B-21, B-38, B-23), extendiéndolo al estudio de campos no tensionales (Ref. B-52, Cap. 10) y lo que tiene más interés para nosotros, adaptándolo para el tratamiento de problemas no lineales. Principalmente se ha trabajado para tener en cuenta los efectos dinámicos, y con menos profundidad, para resolver problemas plásticos y de grandes deformaciones.

Sin embargo, puede decirse que pese a existir ya bastantes trabajos publicados relativos a estos problemas plásticos y no lineales, el tema está aún en sus comienzos, debido a las dificultades que se presentan, y nuestro deseo es realizar una modesta contribución que facilite de un modo práctico la aplicación del método de los elementos finitos a la plasticidad contenida, empleando las teorías plásticas más rigurosas.

METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

B.2.- Fundamento teórico

B.2.1.- Hipótesis y método.-

a). Se descompone el continuo en una serie de elementos por unas líneas o superficies imaginarias. Normalmente serán triángulos o cuadriláteros en problemas planos, o tetraedros o exaedros en el espacio.

b). Dichos elementos se interconectan en un número finito de puntos nodales seleccionados situados en sus contornos, (normalmente los vértices, en caso de que los elementos sean polígonos o poliedros).

c). Los corrimientos de dichos nodos constituyen las incógnitas básicas del problema. Normalmente serán 2 incógnitas en problemas planos y 3 en el espacio. Sin embargo, pueden considerarse corrimientos generalizados tal como sus derivadas o combinaciones de las mismas; este es el caso de la aplicación al cálculo de placas, en que las incógnitas son la flecha y las dos pendientes (derivada de la flecha respecto ambas coordenadas).

d). Se crean una o varias funciones en cada elemento que definan unívocamente el estado de corrimientos en función de los corrimientos nodales, por ejemplo del tipo $u_i = \sum_{pqr} a_{pqr} x^p y^q z^r$.

La elección de dicha función es arbitraria, y a medida que sea más compleja y con más grados de libertad se convergerá más rápidamente hacia la solución exacta (aún con pocos elementos de gran tamaño).

Esta función, sin embargo, no es libre; debe ser continua en cada elemento, y de un elemento a otro a través de los nodos que los unen. Por otro lado el número de parámetros a_{pqr} de la función será igual al número de grados de libertad del elemento (número de nodos por los corrimientos de cada uno).

e). Esas leyes de corrimientos definen las deformaciones de cada elemento y conocidas sus propiedades reológicas queda determinado el estado de tensiones en los mismos y en sus contornos.

f). En los puntos nodales se sitúan unas fuerzas ficticias (tantas como grados de libertad tiene el nodo) que equilibran o sustituyen a las tensiones que actúan sobre el perímetro del elemento, así como a sus fuerzas de masa y fuerzas exteriores.

g). Expresado el equilibrio de los nodos en función de sus corrimientos incógnitas se constituye un sistema de ecuaciones lineales en sustitución de la ecuación diferencial del problema.

h). En aquellos nodos del contorno general del sólido que deben cumplir ciertas condiciones (desplazamientos prefijados) se sustituyen las ecuaciones de equilibrio por éstas.

i). Resuelto el sistema de ecuaciones lineales y obtenidos los corrimientos de los nodos, a partir de los mismos se obtienen las tensiones en cada elemento.

El método, como luego se indica, equivale a minimizar la energía potencial del conjunto. Si se minimiza otra función, empleando como incógnitas unos desplazamientos generalizados, - pueden tratarse problemas de campos diferentes del elástico, como son redes de filtración, propagación de temperatura, campos magnéticos y eléctricos, etc. (Ref.B-52,Cap. 10; Ref.B-4, pag. 1601)

B.2.2.- Formulación.

El desarrollo matemático de lo que se acaba de exponer es el siguiente:

Sea \vec{d}_e el vector de desplazamientos incógnitas de los nodos de un elemento. El corrimiento \vec{f} de otro punto queda definido por la función N

$$\vec{f} = (N) \times \vec{d} \quad (1)$$

En el problema plano que aquí se trata se ha tomado -- el caso más simple de elementos triangulares (fig. B-1).

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned} \quad (2)$$

Particularizando para los tres vértices se tienen 6 ecuaciones de las que se obtienen los 6 coeficientes a_i en función de los corrimientos incógnitas \vec{d}_e . Por tanto el desplazamiento de un punto cualquiera $\vec{f} = (u, v)$ puede expresarse en función de los corrimientos nodales $\vec{d} = (u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)$ a través de la matriz $N = (N_1, N_2, N_3)$ donde N_i son submatrices de tamaño 2×2 .

Derivando los corrimientos se obtienen las deformaciones \vec{e}

$$\vec{e} = (B) \vec{d}_e \quad (3)$$

Basta para ello derivar la matriz (N)

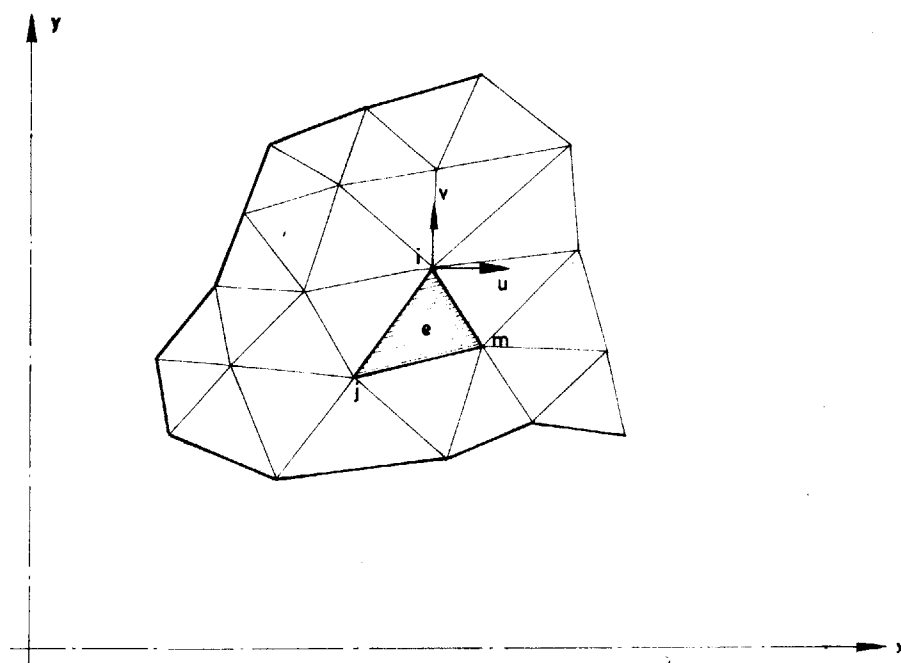


Fig. B-1

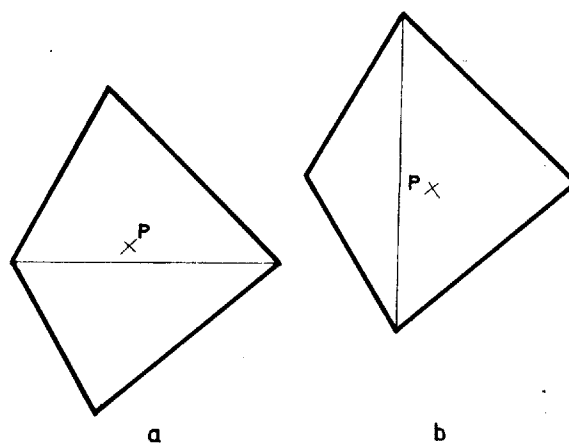


Fig. B-2

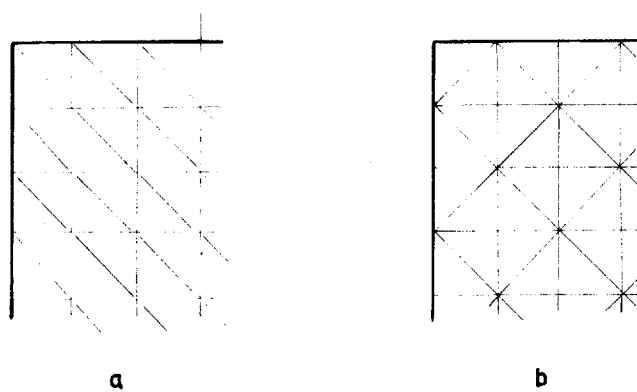


Fig. B-3

En nuestro caso $\bar{\epsilon} = (\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}) = (\frac{d_u}{d_x}, \frac{d_y}{d_x}, \frac{d_u}{d_y} + \frac{d_y}{d_x})$ y por ser \bar{f} lineal queda $\bar{\epsilon}$ con valores constantes en cada elemento. El terreno en que se excava nuestro talud, debido a su peso propio no tiene una ley lineal de tensiones, sino que ésta es escalonada.

Definidas las características reológicas de cada elemento por su matriz (D) las tensiones en el mismo vienen dadas por:

$$\bar{S}_e = (D) (\bar{\epsilon} - \bar{\epsilon}_0) \quad (4)$$

Siendo $\bar{\epsilon}_0$ las deformaciones iniciales, térmicas, etc.

Aquí se ve la sencillez con que pueden introducirse la anisotropía y la no homogeneidad, simplemente variando esta matriz (D). Sin embargo no es tan simple como indica Zienkiewicz (ref. B-52, pag. 160), pues él mismo (Ref. B-53, pag. 254) señala la necesidad de que las transiciones de un material a otro no se haga bruscamente y se afine la malla en el entorno.

En el caso plano se tiene:

$$\bar{S} = (S_x, S_y, t_{xy})$$

Un cuerpo con anisotropía transversal en tres dimensiones tendrá una matriz D del tipo.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ \text{Simetr.} & & & & C_{44} & \\ & & & & & 2(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \\ T_{xy} \\ T_{yz} \\ T_{zx} \end{bmatrix}$$

que en tensión plana se convierte en:

$$(D) = \frac{E_2}{1 - n m_2^2} \begin{bmatrix} n & n m_2 & 0 \\ n m_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & G_2 \frac{(1 - n m_2^2)}{E_2} \end{bmatrix}$$

siendo los cinco parámetros del terreno.

E_1 = módulo de Young en dirección horizontal xy

E_2 = módulo de Young en dirección vertical xz

m_1 = coeficiente de Poisson en el plano horizontal xy

m_2 = coeficiente de Poisson en el plano vertical xz

G_2 = módulo de deformación transversal en el plano xz

$$n = \frac{E_1}{E_2}$$

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1 + m_1)} \quad \text{no es independiente.}$$

En deformación plana se tiene:

$$D = \frac{E_2}{(1 + m_1)(1 - m_1 - 2 n m_2^2)} \begin{bmatrix} n(1 - n m_2^2) & n m_2(1 + m_1) & 0 \\ n m_2(1 + m_1) & (1 - n^2) & 0 \\ 0 & 0 & G_2 \end{bmatrix}$$

Puede simplificarse esta última expresión convirtiéndola en la de tensión plana con los valores ficticios. (Ref. B-15, Pag. 74).

$$E_1' = \frac{E_1}{1 - m_1^2}$$

$$E_2' = \frac{E_2}{1 - n m_2^2}$$

$$m_2' = \frac{m_2(1 + m_1)}{1 - n m_2^2}$$

$$m_2' = \frac{m_2(1 + m_1)}{1 - n m_2^2}$$

$$n' = \frac{E_1}{E_2} \frac{1 - n m_2^2}{1 - m_1^2}$$

La determinación de las fuerzas equivalentes \vec{F}_e aplicadas en los nodos se puede hacer aplicando unos desplazamientos virtuales en dichos nodos e igualando los trabajos interno y externo de \vec{F} de los tendones \vec{S} en el perímetro de las fuerzas de

masa \vec{P} y de las fuerzas exteriores en el contorno \vec{R} , como puede verse en diversas obras (Ref. B-52, pag. 16; Ref. B-4, pag. 1605; Ref. B-45, pag. 32).

De este modo se llega a:

$$\vec{F}_e = \left[\int (B)^T (D) (B) dv \right] \vec{d}_e - \int (B)^T (D) \vec{e}_0 dv - \int (N)^T P dv - \int (N)^T \vec{g} d(\text{área contorno}). \quad (5)$$

Cuya interpretación se simplifica si se llama:

$$(K_e) = \int (B)^T (D) (B) dv \quad (6)$$

matriz de rigidez del elemento.

$$\vec{F}_{pe} = - \int (N)^T \vec{P} dv \quad (7)$$

fuerzas debidas a la masa.

$$\vec{F}_{e0} = - \int (B)^T (D) \vec{e}_0 dv \quad (8)$$

fuerzas debidas a tensiones iniciales.

$$\vec{R}_e = \int (N)^T \vec{g} d \text{área} \quad (9)$$

fuerzas exteriores en el contorno.

Así se vé fácilmente que se ha establecido la condición de equilibrio.

$$\vec{F}_e = (K_e) \vec{d}_e - \vec{F}_{pe} - \vec{F}_{e0} - \vec{R}_e \quad (10)$$

En nuestro caso de problema plano \vec{F}_e tiene 6 componentes y deben obtenerse en cada elemento las matrices de rigidez BDB de tamaño 6 x 6, la de fuerza deformación BD de tamaño 6 x 3 si hay tensiones iniciales, y la de tensión corrimiento-BD de tamaño 3 x 6 para que una vez obtenidos los desplazamientos nodales \vec{d} , calcular a partir de ellos las tensiones en el sólido.

En cada elemento se obtienen tantas ecuaciones como grados de libertad tiene y expresan las fuerzas que hay que aplicar en sus nodos para mantenerle en equilibrio. Si se suman todas las ecuaciones correspondientes a un grado de libertad de un nodo y que son tantas como elementos confluyen en él, se tiene una ecuación que expresa el equilibrio en dicho nodo y cuya estructura es igual que la ecuación (10).

Se obtiene así un sistema de ecuaciones lineales que representan el equilibrio en todos los nodos y cuyo número es igual al producto del nº de nodos por el de grados de libertad de cada nodo, y cuyas incógnitas son los desplazamientos de éstos. Ello equivale a tratar con la ecuación (10) todo el sólido, siendo ahora (K) la matriz de rigidez del sólido entero, que se forma por superposición de las matrices de cada elemento. Se demuestra (Ref. B-15, pág. 20) que dicha matriz es simétrica y positiva definida. (Ref. B-6, pág. 941), cuando existe potencial elástico ó plástico.

Si dos nodos "i" y "j" no tienen ningún elemento que los una, el término (o submatriz) K_{ij} de la matriz total (K) debe ser nulo. Si no es así K_{ij} se obtiene por adición de los términos (o submatrices) K_{ij}^e correspondientes de todos aquellos elementos a los que pertenecen simultáneamente ambos nodos "i" y "j".

Por ejemplo, en el problema plano con elementos triangulares la matriz de rigidez del elemento (K_e) tiene de dimensiones 6×6 , y está formada por 3×3 submatrices de 2×2 cada una. Esas submatrices de 2×2 relacionan cada nodo con otro o consigo mismo y dentro de esa submatriz cada grado de libertad o corrimiento de un nodo con cada grado de libertad del otro. En el sólido total la matriz K está también formada por submatrices --

(K_{ij}) de 2×2 . Si es $i = j$ relacionan un nodo consigo mismo y se obtienen por suma de tantas submatrices como elementos rodean a ese nodo. Si $i \neq j$ se obtiene por suma de dos submatrices K^e de 2×2 de los dos elementos que hay a ambos lados de la recta ij .

El significado físico de un término K_{ij} es por tanto el siguiente. Si se obliga al sólido a que mantenga inmóviles todos sus nodos, menos el "i" al que se aplica un corrimiento unidad, la fuerza que aparecerá en el nodo "j" será " K_{ij} ". Dicha fuerza se transmitirá a través de los elementos que unen ambos nodos y la parte de fuerza que llevará cada elemento será el valor del término K_{ij}^e de su matriz de rigidez elemental (K_e).

En definitiva la aplicación del método consta de tres etapas:

- a). Formación de la matriz de rigidez del continuo total y del vector de cargas. Para ello hay que calcular las matrices de rigidez de cada elemento, y en los pasos intermedios se obtienen las matrices DB que se utilizan en el escalón "c".
- b). Resolución del sistema de ecuaciones (10) con obtención de los corrimientos nodales \vec{d} .
- c). Obtención de las tensiones en los elementos a partir de las ecuaciones (4) y (3).

$$\vec{S}_e = \left[\int (D) (B) \, dv \right] \vec{d}_e \quad (11).$$

B-2-3.- Equivalencias del método.

a) El método, inicialmente elaborado para resolver problemas lineales (elásticos), no es sino la sustitución del operador diferencial L_{ij} de la ecuación de Navier por un operador algebraico lineal (K) (Ref. B-9, pag. 170).

$$G \nabla^2 f_i + (1 + G) \frac{d^2 e}{dx_i^2} + F_i = 0 \quad i = 1, 2, 3. \quad (12)$$

es decir:

$$L_{ij} U_j = F_i = 0 \quad (12)$$

$$\text{Siendo: } L_{ij} = (1 + G) \frac{d^2}{dx_i dx_j} + G d_{ij} \frac{d^2}{dx_k dx_k}$$

e = deformación volumétrica.

f_i = corrimientos de un punto cualquiera (nodal o nó).

F_i = Fuerzas.

$1, G$ = parámetros de Lamé.

$$\text{Descomponiendo el operador } L_{ij} = (L) = (b)^T (D) (b), \quad (13)$$

siendo:

$$(b) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dx_3} \\ \frac{d}{dx_1} & \frac{d}{dx_2} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx_3} & \frac{d}{dx_2} \\ \frac{d}{dx_3} & 0 & \frac{d}{dx_1} \end{pmatrix}$$

$$\vec{e} = (b) \vec{f}$$

Se ve la equivalencia entre (10) y (12) y entre (13) y la matriz de rigidez $(K) = (B)^T (B) (D) B$.

$$\bar{e} = (B) \bar{d} \equiv (b) \bar{r} = (b) (N) \bar{d}$$

Por lo tanto la única linealización que se hace es la del operador (b) .

$$(B) = (b) (N)$$

El método cumple por tanto las condiciones de equilibrio y también la compatibilidad de deformaciones, pues (12) no es sino la sustitución de las últimas en las primeras. Se resalta este detalle porque algunos autores, como Allen y Southwell, no tienen en cuenta la compatibilidad de deformaciones (Jurisic, Ref. 17, página 289). Ahora bien, es de señalar que en el método de elementos finitos se cumplen en cada elemento y a través de los nodos que los unen, pero no necesariamente en el resto del contacto entre elementos.

También se introduce una simplificación de la matriz (N) en la ecuación (2) que se comenta en el apartado dedicado a la convergencia, y otra en el problema elastoplástico que aquí se trata, al linealizar la matriz (D) .

b).--Puede verse también que este método es equivalente a un caso particular del método de Rayleigh-Ritz (Ref. B-52, pág. 21; Ref. B-4, pag. 1603; Ref. B-15, pag. 14 y 32) pues si se establece la con-

dición que deben cumplir los corrimientos \bar{d} para que la energía potencial total sea mínima, se llega también a la ecuación (5).

c).--El método es una aproximación de la solución exacta, hacia la que converge, y como ésta da una energía potencial mínima, la solución obtenida dará una energía de deformación (signo-opuesto a la potencial) inferior a la real (Ref. 852, pag. 23), es decir, la integral del producto de tensiones por deformaciones queda infravalorado. Ello tiene cierto interés práctico, aunque no mucho porque unas tensiones pueden infravalorarse y otras no.

En el caso de que la función de desplazamientos (N) sea tal que no mantenga la continuidad en la frontera entre dos elementos, salvo en los nodos, existe ahí un almacenamiento de la energía de deformación que hace que lo anterior no se cumpla. Dicho almacenamiento se produce pese a ser en un área infinitesimal debido a que las deformaciones toman valores infinites.

Si se plantea el método de los elementos finitos en tensiones en lugar de en deformaciones creando unas funciones de tensiones adecuadas en cada elemento en función de los valores en los nodos de modo análogo a lo que se hizo con la matriz (N) en corrimientos en la exposición hecha, (aunque en tensiones resulta mucho más difícil de crear), y se minimiza la energía complementaria en lugar de la potencial, se obtiene una solución que sobrestima la energía de deformación. Con ello queda acotada la solución por los dos lados si se resuelve el problema por ambos métodos de los elementos finitos en deformaciones y en tensiones (demostrado en Ref. B-1, pag. 1599) lo cual tiene gran importancia teórica. Esta variante del método, elaborada por Fraeijis de Veubeke y Pian

(Ref. B-21, Ref. B-38) ha sido aplicada a poquísimos problemas hasta ahora, debido a su dificultad; en la práctica suele ser más fácil gastar ese esfuerzo suplementario en afinar la malla para aproximarnos más a la solución real que el acotarla. Unas de las pocas aplicaciones son las debidas a Elías (Ref. B-20) y a Guellec (Ref. B-23, págs. 31 y 105).

B - 3 Convergencia y unicidad

Como ya se indicó en el apartado B-1, al resolver un problema numericamente es de gran importancia el estudio de la unicidad de la solución y de la convergencia hacia la misma, - para asegurarse de que se obtiene realmente la solución buscada. El "vicio" existente hoy por el ordenador electrónico, tomando como artículo de fe lo que este imprime, debe superarse, recordando que a fin de cuentas como toda obra humana, está sujeta a errores.

La unicidad de la solución para problemas elásticos está claramente demostrada, pero al introducir la plasticidad, el problema se complica mucho más. En la hipótesis de la existencia de una función potencial plástico esta demostrada la unicidad (Hill Ref. A-44 pág. 53) para cuerpos rigidizables, y para cuerpos plásticos perfectos está demostrada la unicidad en tensiones (Ref. A-44 pág. 57) pero no en deformaciones más que en - ciertos casos como es lógico, puesto que la relación tensión - deformación no es biunívoca; incluso está demostrada la unicidad en problemas en que exista descarga (Il'iouchine, Ref A-47 pág. 118)

En nuestro caso se ha utilizado un cuerpo elastoplástico perfecto con función potencial, y a fin de asegurar la obtención de la solución correcta se ha reproducido un proceso de carga ideal para seguir paso a paso la trayectoria de tensiones. La solución obtenida deberá ser pues la única correcta para ese proceso incremental de las fuerzas actuantes, aunque por supuesto si se reproduce otra secuencia de cargas y descargas, simulando la excavación de elementos por un orden determinado, el resultado sería otro.

El método de los elementos finitos, en caso de utilizar elementos conformes, es simplemente un caso particular del de Rayleigh - Ritz (Ref. B.52 pág. 21; Ref. B.13 págs. 15 y 32; Ref. B.1 pág. 1599; Ref. B.6 pág. 942), que consiste en sustituir la ley de desplazamientos incógnitas por unas funciones prefijadas (que cumplan las condiciones de contorno) multiplicadas por unos parámetros, y al aplicar el principio de los desplazamientos virtuales minimizando la energía del sistema, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales con dichos parámetros como incógnitas, sustituyéndose así la ecuación diferencial del problema. Para este método, llamado también de Galerkin, está demostrada la convergencia hacia la solución exacta cuando las funciones prefijadas dependen de un número finito de parámetros arbitrarios, son conformes y forman una secuencia completa. (Ref. B-6 pág. 941, Ref. B-15 pág. 25)

La conformidad se refiere a la continuidad de la función, como se detalla más adelante; y en cuanto a la secuencia de funciones completa, se cumplirá si para una función $F(x)$ de la familia otra de la secuencia de tipo $\sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$ (siendo " a_i " los parámetros) cumple
$$\lim \int \left[F(x) - \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \right]^2 dx = 0$$
 Esto se verifica para funciones polinómicas y trigonométricas (del tipo $a_i x^i$; $\sin ix$; $\cos ix$) por ejemplo.

Efectivamente, al añadir nuevos términos a la función polinómica, la solución obtenida se ceñirá más a la buscada; además al contener cada nuevo término de la secuencia al anterior,

la exactitud será siempre igual (en el caso de que los nuevos parámetros arbitrarios introducidos sean nulos) o mayor, y la convergencia será monotónica.

Veamos cuando se obtiene la convergencia hacia la solución exacta por el método de los elementos finitos.

Generalizando el método al estudio de problemas de campos cualesquiera, como ya se indicó, la funcional "G" que se minimiza no será la energía potencial, sino otra distinta más general.

$$I = \int (W(x, y, \phi, \frac{d\phi}{dx}, \frac{d\phi}{dy}, \dots, \frac{d^n \phi}{dx^n}, \frac{d^n \phi}{dy^n}) d \text{ area}$$

siendo " ϕ " la función buscada (desplazamientos normalmente) y " n " el grado de la mayor derivada que entra en la expresión de la "densidad de energía W ". Las " $n-1$ " primeras derivadas se denominan "derivadas principales".

En el método la función " ϕ " se sustituye por unas funciones prefijadas (normalmente polinómicas, como las de las ecuaciones 2, 15 y 16) distintas en cada elemento, y los parámetros son los corrimientos nodales o sus derivados. Según De Arantes (Ref. B-6 pág. 942) lo que caracteriza al método es precisamente esa variación de la función prefijada para cada elemento (e incluso en subdominios de cada elemento), y también el que la continuidad de esta y sus derivados principales sea "reducida", es decir, se cumpla en los nodos y en el interior de cada elemento, pero no en la frontera entre elementos (en este caso de "no conformidad", los elementos finitos no constituyen un caso particular del método de Ritz). Estas condiciones permiten formar la matriz de rigides del sólido conjunto por su descomposición en otras mucho más simples y manejables.

La condición necesaria y suficiente para que exista "conformidad", es por tanto que x y sus derivados principales sean también continuos y acotados y la derivada n -ésima sea acotada en el contorno entre elementos (Ref. B-52 pág. 24; Ref. B-45 pág. 25).

En tal caso de conformidad la convergencia queda demostrada por coincidir con el método de Ritz. Se puede obtener una secuencia completa según Melosh (Ref. B-45 pág. 36; Ref. B-6 pág. 943) a base de afinar la malla añadiendo nodos nuevos, y conservando los anteriores, pero de modo que en los elementos nuevos se puedan reproducir las mismas leyes de desplazamientos que antes. Otra forma de conseguirla es manteniendo el mismo número de nodos y elementos, pero añadiendo términos en las funciones polinómicas de corrimientos (en el límite, con un único elemento, se tendría el método general de Ritz). De esta forma la convergencia (fig. B-7) es más rápida, pero se tienen dos inconvenientes: el primero es que al tener mayor tamaño los elementos se reproduce muy groseramente la plastificación progresiva del material, y el segundo que para calcular los nuevos parámetros se fuerza una continuidad "excesiva" y ello no permite un cambio brusco de las propiedades de los elementos (Ref. B-52 pág. 222 y 224; Ref. B-45 pág. 164 y 350).

En estos casos la convergencia es monotónica en la energía X , pero no en corrimientos q y tensiones (Ref. B-45 pág. 25; Ref. B-52 pág. 22 y 25). Es de destacar que la convergencia en tensiones es mucho más lenta.

Si no se mantiene la continuidad a través de la - frontera entre elementos, es decir no hay conformidad, ya no existe coincidencia con el método de Ritz y la convergencia en el caso general no está demostrada.

Zienkiewicz (Ref. B-52 pág. 25) propone (sin demostrarlo rigurosamente) como criterio el que la condición necesaria y suficiente para la convergencia es que las funciones prefijadas no conformes constituyan una secuencia completa, bastando para ello que " ϕ " y sus " n " primeras derivadas puedan tomar cualquier valor constante en el elemento. Posteriormente De Arantes (Ref. B-6 pág. 944 y 947) lo ha demostrado para el caso de que estas funciones sean polinomios completos de grado " n ", con todos sus términos multiplicados por - parámetros arbitrarios independientes en un número igual al - de grados de libertad del elemento. Para ello supone que la solución exacta tendrá al menos " $n + 1$ " derivadas continuas, y que las fuerzas de masa deben cumplir también la condición de continuidad.

Particularizando a problemas elásticos, la función de energía que se minimiza es sólo función de las primeras - derivadas de los corrimientos. Por tanto como las derivadas principales son de orden cero, basta la continuidad de los - propios corrimientos. En cuanto al criterio de Zienkiewicz, en este caso quiere decir que si el sólido tiene una deformación y tensión constante o un movimiento rígido, las - funciones prefijadas deben poder reproducirlo. Por ello basta la ley lineal (2) del triángulo de deformación constante para

obtener la conformidad y la convergencia monotónica (Ref. B-6 pág. 934; Ref. B-52 pág. 22; Ref. B-15 pág. 35) Una secuencia de mallas puede visualizarse en la fig. B-5 en que cada triángulo se subdivide en cuatro de deformación constante, o podría permanecer entero suponiéndole una deformación lineal según la ecuación (15), en ambas modalidades de secuencia el nuevo término creado permite una mejor aproximación de la realidad.

Otro caso particular interesante es el de las placas. En ellas los "parámetros" de Ritz son los corrimientos nodales "w" normales a la placa y sus dos primeras derivadas $\frac{\partial w}{\partial x}$ y $\frac{\partial w}{\partial y}$.

La energía es entonces función de los momentos flectores, o sea las curvaturas o derivadas de segundo orden, y para obtener la convergencia y conformidad se precisa que la función prescrita sea un polinomio completo de segundo orden (Ref. B-15 pág. 35)

Si la conformidad no se cumple, como ya se dijo en el apartado 2.3, se almacena energía en la frontera entre elementos, pero al disminuir el tamaño de estos dicha energía almacenada tiende a cero y se obtiene la convergencia, pero no monotonicamente. Para ello bastará cumplir el criterio de la deformación constante (Ref. B-52 pág. 22) o sea de polinomio completo (Ref. B-6 pág. 947). Es de notar que el que no sea monotónica la convergencia en energía carece de importancia, pues las variables que suelen interesar son los corrimientos y tensiones, y además se comprueba a veces (Ref. B-52 pág. 120; Ref. B-6 pág. 930 y 943) que la convergencia es más rápida con

elementos no conformes que con otros conformes. En cambio lo que sí representa un inconveniente es la dificultad de obtener una secuencia, pues aunque se reduzca la malla, los elementos pequeños en que se subdivide no siempre podrán reproducir la misma ley que tenían los anteriores elementos mayores (Ref B-45 pág. 37). Pero este problema no se presenta en el caso de elasticidad plana, sino en el estudio de placas y láminas, motivo por el cual no se detalla, remitiéndose a los ejemplos dados por Connor (Ref. B-45 pág. 320 y 331).-

B-4.- Aplicación del método.

B-4-1.- Tipos de elementos.

B-4-1-1.- Problemas planos.

El elemento clásico es el triángulo, del que ya se han hecho algunas indicaciones en el apartado B-2, y es el que ha sido empleado en esta ocasión.

Triángulo con deformación constante:

Consta de dos incógnitas por vértice, y el caso más simple es el de deformación constante definida por la ley (2). Dicha ley mantiene la continuidad de corrimientos en toda la frontera entre elementos contiguos. El operador (B) da valores constantes en todo el triángulo, y las integrales de la ecuación (5) consisten simplemente en multiplicar por el área. Al ser la deformación constante lo es también la tensión en todo el elemento, con lo cual existe una discontinuidad al pasar de un elemento a otro.

La gran ventaja de este elemento es su sencillez y la comodidad del trabajo con él y la gran flexibilidad con que se adapta a los diferentes contornos y a los gradientes de tamaño de malla que se deseen.

La forma del elemento conviene que se aproxime en lo posible a la equilátera. De los resultados comparativos de Cónnor (ref. B-15, pág. 111) se deduce que la relación del lado mayor al menor no debe exceder a 3 y el ángulo menor no debe bajar de 20° y es bastante conveniente incluso cambiar dichos valores por 2,5 y 25° . Según Zlamal el error es proporcional al cuadrado de la mayor altura del triángulo, e inverso al seno del ángulo menor (Ref. B-23 pág. 38). De aquí se deduce que los trabajos de algunos autores que no han cuidado este detalle deben tener errores apreciables, como son Morgenstern y Tamuly Phukan (Ref. B-36, pág. 316), Agarwal (Ref. B-2),

Duncan y Dunlop (Ref. B-19, pag. 478) que alcanzan relaciones entre lados de 1 a 12. (Yang Huang, Ref. B-29).

De las dos formas en que puede dividirse un cuadrilátero en dos triángulos (Fig. B-2) lo más adecuado es hacerlo partiéndolo por la diagonal menor, para cumplir el consejo del párrafo anterior.

La malla, en caso de que sea regular, aparentemente da igual que adopte cualquiera de las dos variantes de la Fig. B-3. El número de incógnitas es el mismo, y según puede observarse en diversas aplicaciones (Ref. B-52, pag. 109 y 159; Ref. B-45, pág. 111) la exactitud es análoga. Sin embargo, en este caso se ha adoptado la de la izquierda, pues en ella cada nodo está rodeado por 6 triángulos, en vez de por 4 y 8 alternativamente. Ello tiene dos ventajas: las fuerzas de masa, que en mecánica del suelo suelen ser predominantes, actúan como concentradas por igual en todos los nodos (a cada nodo va un tercio del peso de cada triángulo que le rodea) aproximándose más a la realidad; además la matriz de rigidez queda más uniforme al tener los términos de la diagonal principal 6 sumandos, en lugar de 4 y 8 alternativos.

Una pequeña mejora teórica consiste en obtener la matriz de rigidez del cuadrilátero para ambas descomposiciones posibles (Fig. B-2) y trabajar con la semisuma, pero realmente no compensa el esfuerzo doble en la obtención de esas matrices. Un artificio mucho más útil debido a Wilson (Ref. B-50, B-4 ; B-52, pág. 225 ; Ref. B-13, pag. 154), consiste en subdividir el cuadrilátero en cuatro triángulos, con un nodo interior (Fig. B-4) y obtener la matriz de rigidez de los 4, superponiéndolas, y a continuación se eliminan las filas y columnas correspondientes al nodo interno, ya que las fuerzas (F_b) en él -

se equilibran y anulan. La matriz total de 10×10 queda así reducida a 8×8 obteniéndose una economía notable de cálculo. Descomponiéndola en submatrices K_{aa} de 8×8 y K_{bb} de 2×2 correspondiente al nodo interior.

$$\begin{Bmatrix} F_a \\ F_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix}$$

$$(F_a) = (K_{aa}) (u_a) + (K_{ab}) (u_b)$$

$$(F_b) = (0) = (K_{ba}) (u_a) + (K_{bb}) (u_b)$$

De esta última se obtiene:

$$(u_b) = - (K_{bb})^{-1} (K_{ba}) (u_a)$$

Sustituyendo en la primera:

$$(F_a) = [(K_{aa}) - (K_{ab}) (K_{bb})^{-1} (K_{ba})] (u_a) = (K'_{aa}) (u_a)$$

La "condensación" de esos cuatro elementos eliminando el nodo interno equivale a trabajar con la matriz de rigidez para el cuadrilátero de 4 nodos.

$$(K'_{aa}) = (K_{aa}) - (K_{ab}) (K_{bb})^{-1} (K_{ba}) \quad (14)$$

El único inconveniente que tiene este método es que si el cuadrilátero es alargado, la forma de los triángulos queda aún peor proporcionada (Fig. B-4b), y otro, de menos importancia, es que recurre a una malla del tipo de la Fig. B-3b en lugar de B-3a.

Con este elemento triangular de deformación constante la convergencia es en general suficientemente rápida en lo relativo a corrimientos. Sin embargo, en tensiones es algo más problemático, (Ref. B-45, pág. 117; Ref. B-43, pág. 683; Ref. B-52, pág. 37), siendo necesario apretar un tanto la malla para que los errores bajen.

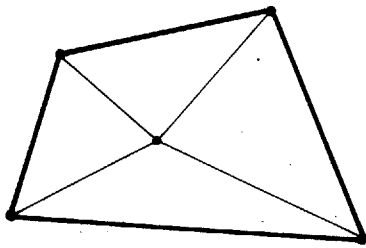
Dichas tensiones, constantes en el elemento, suelen referirse al centro de gravedad del mismo, y entonces alternan la solución exacta con apreciable dispersión; la forma de evitar esto es calculando las tensiones en cada nodo como media (ponderada por las áreas) de los elementos que concurren en él y así la precisión aumenta notablemente. Ello presenta dificultades en caso de no homogeneidad del terreno, y también complica la programación, sobre todo por los nodos de contorno, en los que hay que extrapolar. Por otro lado, en el problema que aquí se trata, debido a la plastificación progresiva de los elementos, no interesa el referir las tensiones a los nodos, pues si en uno se cumple el criterio de plasticidad habría en ese escalón iterativo que plastificar los 6 elementos que le rodean, lo cual es muy grosero. Se ha elegido en su lugar la obtención de la tensión media de dos triángulos contiguos, correspondiente al centro de gravedad del cuadrilátero (Fig. B-2), lo cual da una precisión análoga, es más simple de programar, y más exacto en la iteración plástica por permitir escalones más pequeños.

Con lo dicho en el párrafo anterior se vé otra ventaja - más del método de "condensación" de Wilson (Fig. B-4) ya citado, y es que se expresa la tensión en el centro de gravedad del cuadrilátero, equivalente a un nodo de 4 triángulos.

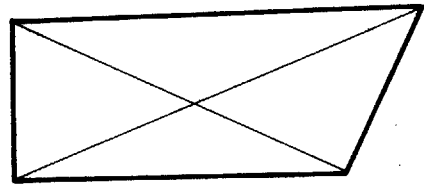
Triángulo con deformación lineal.-

El principal defecto del triángulo con deformación constante radica en la falta de continuidad de las tensiones al pasar de un elemento a otro. Ello se evita transformando la ley lineal (2) de corrimientos en otra parabólica,

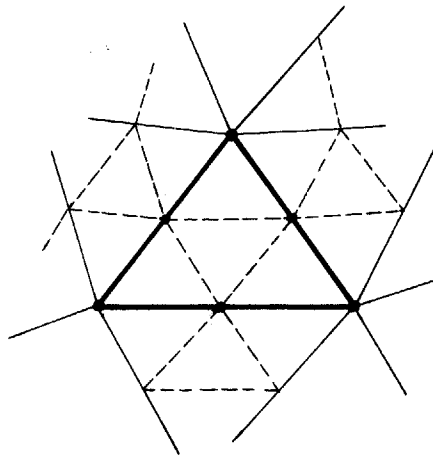
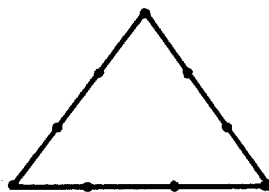
$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 y^2 + a_6 xy \quad (15)$$



a



b

Fig. B-4Fig. B-5Fig. B-6

de modo que su derivada, o sea, las deformadas y tensiones, varíen linealmente y restauren su continuidad en toda la frontera entre elementos (Ref. B-52, pág. 70; Ref. B-15, pág. 135; Ref. B-1, pág. 1606). Para determinar ahora las 12 incógnitas del sistema (15) hace falta dejar doce grados de libertad en el nodo, lo cual se consigue con 6 nodos por triángulo, que son los 3 vértices y los tres centros de los lados (Fig. B-5).

La precisión de este elemento es notablemente mayor, convergiendo mucho más rápidamente en deformaciones y en tensiones hacia la solución exacta, que si se resuelve el problema con triángulos de deformación constante (Ref. B-15, pág. 149), en el sentido de que basta una malla con la tercera parte de incógnitas para obtener una precisión igual o aún mayor. Tiene en contra, como inconveniente, el que las integrales de (5) se complican, y sobre todo, para el problema que aquí se trata de plasticidad contenida interesa más ir a una malla más fina a fin de plastificar sucesivamente elementos lo más pequeño posible.

Triángulo con deformación cuadrática.-

Una mayor refinamiento lo constituye el triángulo con ley cúbica de corrimientos, y cuadrática en desplazamientos. Se suelen tomar 18 incógnitas, que pueden definirse de dos formas: con 9 nodos en el triángulo (los 3 vértices y 2 más por lado dividiendo éste en tres partes iguales, ver Fig. B-6), o con solo tres nodos con 6 incógnitas cada uno; (Ref. B-52, pág. 224; Ref. B-15, pág. 164); estas pueden ser:

$$\left(u, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, v, \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dy} \right) \text{ (Ref. B-15, pág. 161)}$$

o pueden tomarse en cambio:

$$\left[u, v, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dy}, \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}, \left(\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dy} \right) \frac{1}{2} \right]$$

como hacen Techer y Hartz (Ref. B-44, pág. 151 y 164), pues el significado físico de estas dos últimas variables es más claro, facilitando el que las fuerzas exteriores puedan ser momentos, y el que exista continuidad en las rotaciones al pasar de un elemento al contiguo, lo cual puede tener interés en algunos problemas concretos.

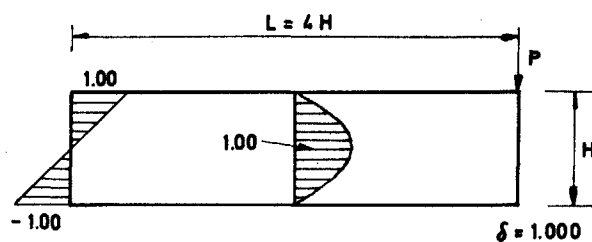
Realmente existen muchos posibles variantes: para completar el polinomio cúbico de corrimientos hacen falta 20 incógnitas y no 18.

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 x^3 + a_8 y^3 + a_9 x^2 y + a_{10} xy^2 \quad (16).$$

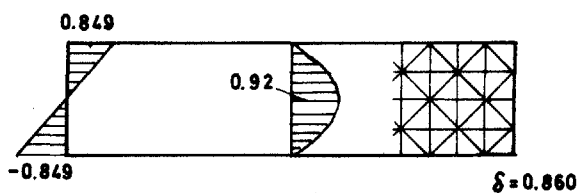
y debe tomarse un nuevo nodo en el baricentro del triángulo con dos incógnitas (Ref. B-45, pág. 161; Ref. B-28), el cual puede "condensarse" si se desea según la ecuación (14), para reducir la matriz de rigidez del elemento de 20 x 20 a un tamaño de 18 x 18. Otra solución es la de Shanda y Wilson que toman un elemento triangular con 15 incógnitas (3 nodos en los vértices con 3 incógnitas, y 3 nodos en los puntos medios de los lados con 2 incógnitas; Ref. B-42).

Se incluye un ejemplo debido a Holand y Bergan (Ref. B-28) bastante espectacular, de la ventaja obtenida con estos elementos refinados (Fig. B-7).

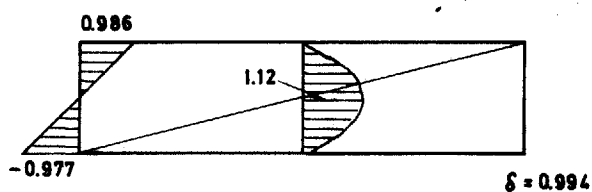
El cuadrilátero es el otro elemento que se ha empleado con bastante profusión, inicialmente por Clough (Ref. B-10), pues tiene notables ventajas, en especial su mayor precisión en la obtención de tensiones, cosa que ocurre también con los métodos de diferencias finitas, pues al alejarse de la malla rectangular se pierde precisión (Ref. B-35, pág. 220).



SOLUCION EXACTA

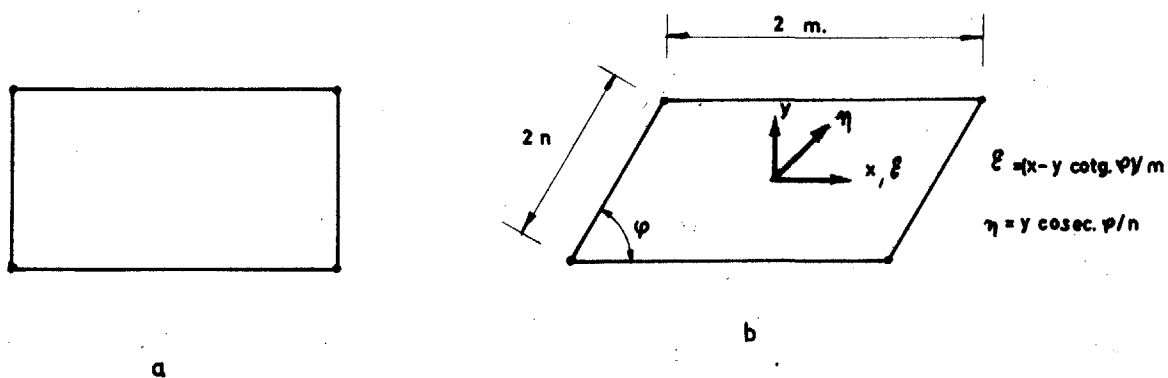


128 Elementos de
6 grados de libertad
170 ecuaciones



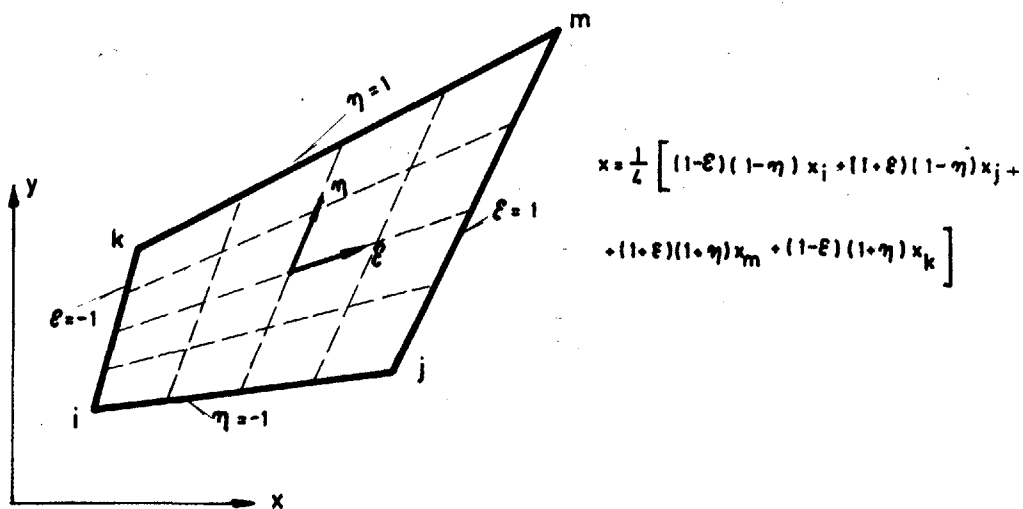
2 Elementos con 18
grados de libertad
24 ecuaciones

Fig. B - 7



a

b



En el caso de rectángulo suele definirse la ley de corrimientos

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy. \quad (17)$$

de modo que las deformaciones son lineales y mantienen la continuidad en la frontera entre elementos, tanto en corrimiento como en deformaciones (Ref. B-52, pág. 66; Ref. B-1, pág. 1606; Ref. B-15, pág. 165). Los ocho coeficientes a_i se obtienen al tener el elemento 4 nodos en los vértices con dos desplazamientos incógnitas cada uno (Fig. B-8 a)

Los resultados de Connor y Will (Ref. B-45, pag. 176) muestran una convergencia extraordinariamente más rápida para este elemento que para triángulos con deformación constante, pues con la cuarta parte de incógnitas se obtiene una precisión análoga. Comparado con el triángulo de deformación lineal este es mucho más preciso en desplazamientos (con la tercera parte de incógnitas, exactitud análoga) pero no en tensiones.

Este elemento parece ser más sensible a la forma no proporcionada que los triángulos, y no es aconsejable el emplear rectángulos de relación de lados superiores a 2,5. Ello representa un grave inconveniente pues resulta así muy limitada la graduación del tamaño de la malla.

El otro defecto importante de este elemento es la imposibilidad de acomodarlo a contornos cualesquiera. Ello se palia bastante bien con paralelogramos, en cuyo caso (17) es válida en coordenadas oblicuas (Fig. B-8 b) o en rectangulares con el cambio (Ref. B-52, pag. 106).

$$x' = x - y \cotg \theta$$

$$y' = y \operatorname{cosec} \theta.$$

Con lo cual las integrales de la matriz de rigidez (5) - no se complican excesivamente.

La generalización a un cuadrilátero cualquiera (Fig. B-8) aún trabajando en coordenadas curvilíneas como hace Irons, resulta de cálculos mucho más prolijos, (Ref. B-52, pag. 68; Ref. B-1, pag. 1606) y como dice Zienkiewicz, (Ref. B-52, pag. 69) resulta dudosa su elección frente a elementos triangulares.

Otra posibilidad es el empleo de rectángulos o paralelepípedos con 8 nodos (los 4 vértices y los 4 centros de los lados), a base de leyes de corrimientos cúbicos del tipo (Ref. B-45, pag. 182; Ref. B-52, Pag. 72).

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + a_7 x^2y + a_8 xy^2 \quad (19).$$

El cuadrilátero puede extenderse a base de dos lados rectos y dos lados curvos a coordenadas polares a fin de resolver problemas tales como el de túneles circulares, etc. (Fig. B-9) sin que ello represente una nueva complicación.

Existe la posibilidad de combinar cuadrados y triángulos - como hacen Duncan y Dunlop (Ref. B-19) pero Connor y Will han comprobado (Ref. B-15, pag. 174 y 181) que con ello se consigue la misma precisión que con solo triángulos, y en ese caso no ofrece ventaja la complicación que ello representa en el programa.

En general, basta que una zona de la malla esté peor diseñada (elementos más simples o mal proporcionados, etc) para que la solución se deteriore aún en el resto de la malla.

Otros poliedros, tal como pentágonos o exágonos, carecen de interés, por poderse subdividir siempre en triángulos y lógicamente no se han utilizado nunca.

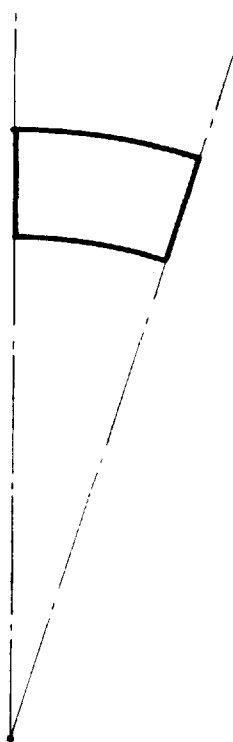


Fig. B-9

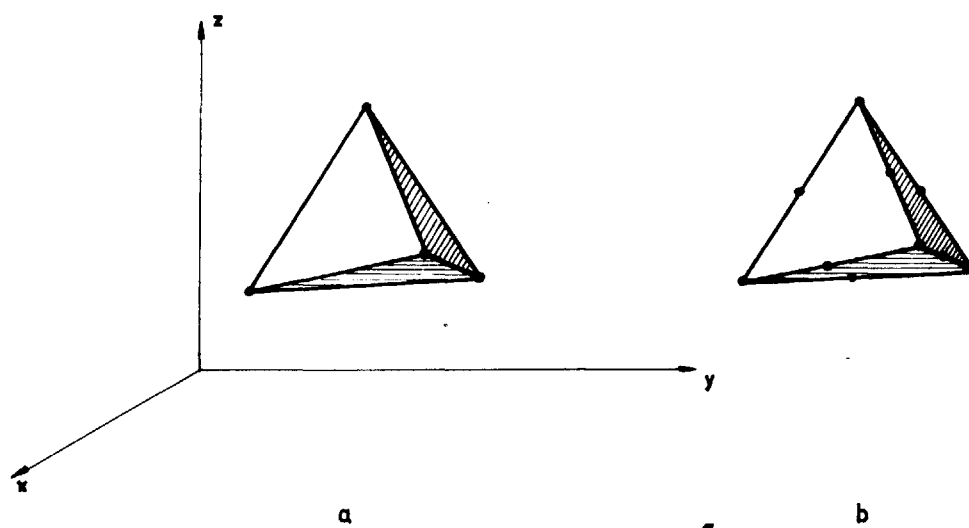
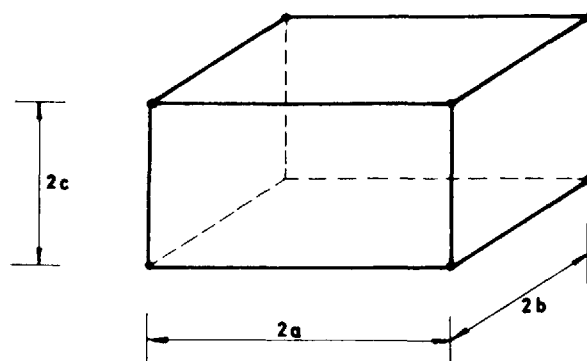


Fig. B-10



B-4-1-2) Problemas tridimensionales.-

El elemento más simple es el tetraedro (Fig. B-10 a) introducido por Martin con deformación constante.

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z \quad (20)$$

Los 12 parámetros a_i se obtienen con los tres desplazamientos de los 4 nudos del tetraedro (Ref. B-52, pag. 75; Ref. B-1, Pag. 1608).

Puede análogamente crearse un tetraedro con deformación lineal a base de introducir 6 nuevos nodos en los centros de los lados (Fig. B-10 b). (Ref. B-52, pág. 84; Ref. B-1, pag. 1609).

Otra solución devida a Martín es el subdividir el hexaedro en 5 tetraedros sumando las matrices de rigidez correspondientes a ellos, (Ref. B-52, pag. 79), análogamente a lo hecho en el plano con un cuadrilátero descompuesto en dos triángulos. La ventaja radica en definir las tensiones en el centro de gravedad del hexaedro promediando la de los 5 tetraedros, aumentando así la precisión, pues análogamente al triángulo, el defecto básico del tetraedro es el gran error en la representación de las tensiones.

Con un prisma rectangular (Fig. B-11) se llega a leyes parabólicas análogas a la (17), de deformación lineal, con notable mejoría respecto a los tetraedros (ref. B-52, pág. 80), e incluso a leyes cúbicas (Ref. B-1, pag. 1609) a fin de mantener la continuidad de corrimientos en las aristas.

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z + a_5 xy + a_6 xz + a_7 yz + a_8 xyz \quad (21).$$

El problema que se presenta al trabajar en tres dimensiones es que el número de incógnitas se eleva en seguida a varios millares, aún para mallas no tupidas, y por ello resulta imprescindible el refinamiento de los elementos. Melosh (Ref. B-35) y Clough (Ref. B-14) han realizado interesantes estudios en los que comparan diversos elementos, y deducen que hay que desechar totalmente los más simples, es decir, el tetraedro, y que en el espacio se debe recurrir a elementos refinados, del tipo del exaedro de 24 grados de libertad.

Así ha hecho Zienkiewicz, y trabajando con exaedros con 60 grados de libertad (8 nodos en los vértices y 12 nodos en los puntos medios de los lados) ha resuelto problemas de presas bóveda y su interacción con el cimiento (Ref. B-2, pág. 254). Este tipo de elemento es el más indicado para utilizar en problemas de flexión (Ref. B-14, pág. 21).

B-4-2.- Condiciones de contorno

B-4-2-1. Introducción en el método de las condiciones de contorno.

El sólido deberá cumplir en su contorno una serie de condiciones, que en este método se limita a verificar en los nodos. Estas pueden ser el que tenga unos corrimientos prescritos en ciertos puntos nodales, a fin de evitar movimientos rígidos y mantener la hiperestaticidad del cuerpo (caso de empotramiento, etc.) o -- bien equilibrar las fuerzas exteriores \bar{R} definidas en la ecuación (9).

Esto último no representa problema en el caso del empleo de triángulos con deformación constante, pues se reduce a sustituir isostáticamente las fuerzas superficiales exteriores por fuerzas -- concentradas en los nodos, que simplemente se suman al término independiente de la ecuación (10). Para elementos más complejos, aunque las fuerzas superficiales se reducen a fuerzas concentradas en los nodos, la obtención de estas no es isostática, sino de acuerdo con la ley de deformación impuesta (Ref. B-15, pág. 104, 123 y 138; B-44, pág. 167).

Respecto a los desplazamientos prescritos el problema que se presenta es la forma de introducirlos en el sistema de ecuaciones general (10). Una forma sería el eliminar esas ecuaciones, ya -- que las incógnitas son conocidas, y así se reduciría el tamaño del sistema, pero ello se desecha porque representa una complicación -- en el programa, ya que habría que reordenar de nuevo toda la numeración de ecuaciones.

Lo conveniente es retocar el sistema y ello debe hacerse -- sustituyendo la ecuación "i-esima" por $1. u_i = u_i$ prescrito.

Con ello bastaría, pero es aconsejable el dejar la matriz

de rigidez simétrica, anulando también los coeficientes de la columna "i-esima", pasando al segundo miembro los términos correspondientes (Ref. B-15, pág. 46) del modo siguiente. En el sistema

$$K_{ij} \cdot u_j = F_i$$

$$\text{Se cambia: } K_{pj} = K_{jp} = 0 \quad K_{pp} = 1$$

$$F_p = u_p \text{ prescrito.}$$

$$F_i \text{ nuevo} = F_i - u_p \cdot K_{jp}.$$

La solución de Payne e Irons defendida por Zienkiewicz - (Ref. B-52, pág. 8 y 233) de limitarse a multiplicar K_{pp} por un número grande como 10^{12} y sustituir

$$F_p \text{ nuevo} = 10^{12} \cdot K_{pp} \cdot \text{prescrito.}$$

nos parece un grave error trabajando con ordenadores --- electrónicos, pues se facilita el alcanzar exponentes mayores del --- que admita la máquina, ocasionando la parada de ésta y además el --- ordenador tarda mucho menos en operar con cero que con otro número --- por pequeño que sea éste, de modo que anulando K_{pj} , K_{jp} se consigue un ahorro de tiempo de máquina casi igual al que se conseguiría reduciendo el tamaño del sistema.

B-4-2-2. Prescripción de corrimientos.-

La prescripción en sí de los desplazamientos en el contorno es otro problema, que puede repercutir mucho en la exactitud de la solución, y en el tiempo total de cálculo necesario.

El terreno indefinido debe sustituirse por una malla limitada.

La cara inferior de dicha malla se supone fija, es decir, con corrimientos horizontales y verticales nulos, y así la aproximación conseguida respecto a un terreno con un estrato profundo duro es correcta, y respecto un terreno de Boussinesq el error cometido será menor a medida que más extensión alcance nuestra malla. Esta hipótesis es empleada por todos los autores, y en general no es discutible, pues aún en casos de malla de pequeña profundidad el problema es real, ya que la mayoría de los terrenos tienen un estrato más duro a no excesiva profundidad.

La cara superior lógicamente se deja con desplazamientos libres.

Las caras laterales pueden ya sufrir diversas limitaciones. Todos los autores coinciden en restringir totalmente el corrimiento horizontal, lo que es suficientemente exacto, aún con mallas no muy extensas.

Respecto al desplazamiento vertical una posible solución es dejarlo libre. Ello equivale a suponer que no hay transmisión de cortantes entre el área segregada y el resto del terreno, es decir, a colocar vertical la elipse de tensiones suponiendo lubricada la línea de corte (Fig. B-12). Esta hipótesis es la que emplean Duncan (Ref. B-19, pág. 478) Clough (Ref. B-13, pág. 83), Liam Finn (Ref. B-31), Huang (Ref. B-29), Girijavallabhan (Ref. B-22) y Christian entre otros, y también se ha empleado en esta nueva ocasión.

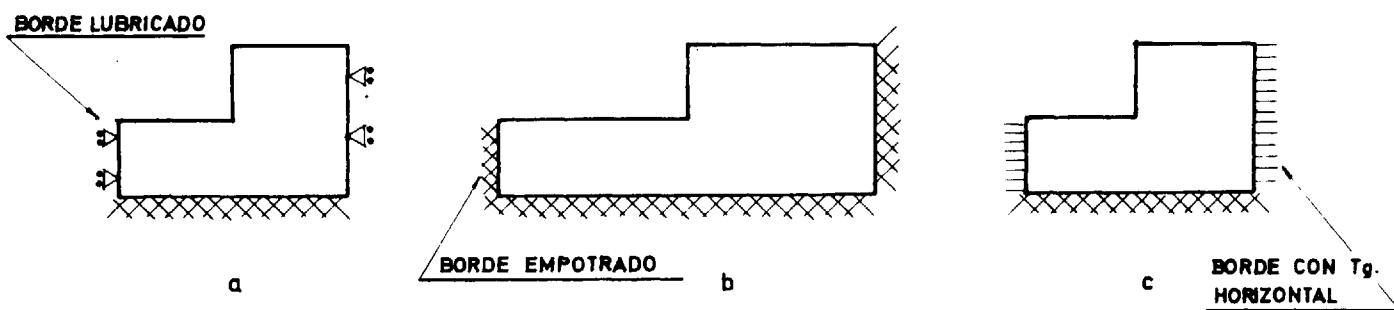
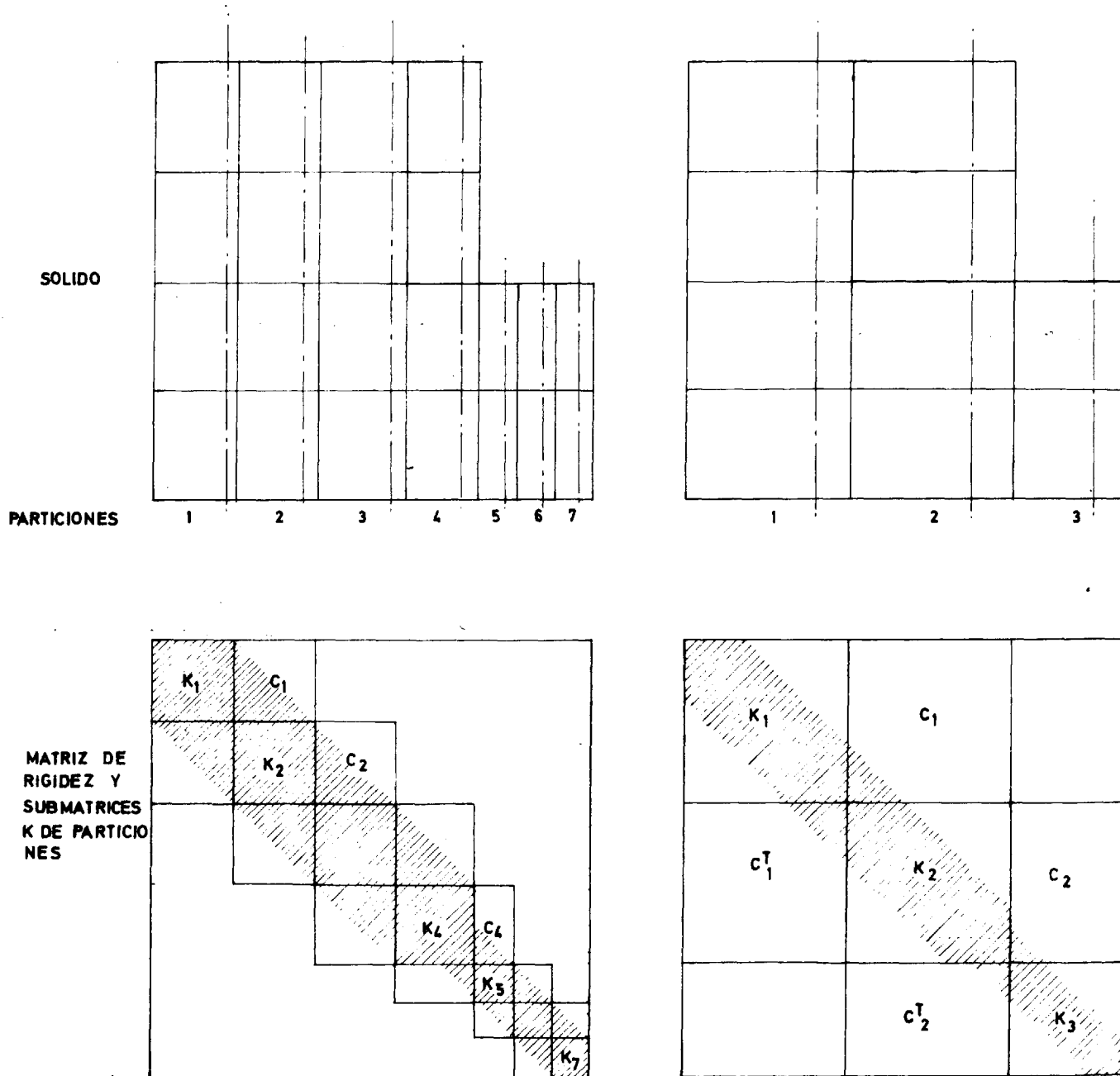


Fig. B-12



Otra solución es restringir totalmente dicho corrimiento vertical, (Fig. B-12 b) suponiendo por tanto "empotrado" no solo la base del área segregada, sino sus lados. Así lo hacen Clough (Ref. 10 pág. 543) Morgenstern (Ref. B-36, pág. 316) e ~~Larín~~ (Ref. B-30, pág. 65).

Una tercera solución (Ref. B-32) es obligar a que dicho corrimiento vertical sea igual al que toma el terreno debido a su propio peso. Es utilizable sólo para problemas en que actúe esta fuerza, por ejemplo no es válido para ver el efecto de una zapata en un terreno sin peso, pero sí para el estudio de un talud como es este caso, en que se vá aumentando gradualmente su peso para estudiar su plastificación progresiva.

Por último, la otra variante consiste en obligar a que las líneas horizontales se mantengan paralelas a sí mismas en dichos puntos del contorno lateral (Fig. B-12 c), obligándose para ello a que el corrimiento vertical del nodo sea igual al del nodo contiguo. Esta solución puede emplearse sólo si cada nodo del contorno lateral tiene al contiguo en su misma horizontal, que es el caso más frecuente. Ha sido utilizado por Lorente de Nó (Ref. 20), Fort (Ref. 12), Ang y Harper (Ref. 37).

Para determinar la extensión del área a estudiar, en profundidad y sobre todo en ancho, la mejor solución es resolver el problema con diversos tamaños, observando a partir de qué extensión las soluciones obtenidas para los corrimientos y tensiones no varían para una de las líneas de contorno. Lógicamente que ello debe estar guiado por unos sencillos cálculos previos, por ejemplo, con el semiespacio de Boussinesq, y que no es preciso el resolver el problema completo varias veces, puede hacerse esto con un número -

menor de elementos más grandes, y basta hacerlo en elasticidad, - sin las iteraciones plásticas posteriores. Con ello el tiempo empleado en estos ensayos es pequeño.

Una vez realizado ese proceso con los cuatro variantes - de desplazamientos prescritos en los contornos laterales, se obtendrían cuatro extensiones diferentes que darían soluciones de la -- misma exactitud, pero con un esfuerzo de cálculo distinto, debido a su diferente extensión. Por ello a simple vista debe rechazarse -- la segunda, de empotramiento total lateral, ya que requiere un esfuerzo de cálculo muy superior sin aportar ventajas.

Comparando la primera de corrimiento vertical libre, y la última de corrimiento igual al del nodo contiguo, resulta dudoso -- a priori cuál dará menor extensión, pues en la primera se desprecia un esfuerzo tangencial y en la última se desprecia la inclinación - de la tangente a la superficie de asientos, que no son magnitudes - comparables. Intuitivamente son bastante parecidos y debe elegirse - entre ellas por consideraciones de otro tipo: ambas son igual de fáciles de programar, si se emplea el método de cálculo de Ang y Harper, pero en cambio la primera resulta más sencilla al aplicar el - método de elementos finitos, motivo por el cual es la que se ha escogido aquí. Si el sistema de ecuaciones resultante se resuelve por un método directo (que es lo que se ha hecho aquí), da igual el empleo de una variante u otra, pero si se resuelve por un método iterativo de relajación converge más rápidamente con la última solución de corrimiento igual al del nodo contiguo.

Por último la tercera solución de hacer el corrimiento -- igual al debido al peso de la columna de terreno (es decir, suponer, que en el contorno ya no influye la forma del talud, o la carga de -- la zapata, etc., según que problema se estudie) es algo más complejo de programar en elementos finitos, y solo presenta ventaja al resol-

B-4-3.- Resolución del sistema.-

Frecuentemente se evita la resolución de ecuaciones diferenciales a base de sustituirlas por un sistema de ecuaciones lineales, pero sin embargo, este nuevo problema para sistemas --- grandes dá también sus quebraderos de cabeza, como indica muy --- bien White (Ref. B-19, pág. 117) pues la precisión deseada y el no requerir excesivo tiempo de ordenador no son fáciles de conseguir.

En el caso de los elementos finitos, como ocurre con -- los métodos de diferencias finitas, el sistema a resolver consta de una matriz banda simétrica. Efectivamente, al hablar de la matriz de rigidez se indicó que los términos correspondientes a dos nodos no contiguos son nulos, quedando pues distintos de cero los términos próximos a la diagonal principal, siendo el ancho total de la banda proporcional al número de desplazamientos de un nodo por la máxima diferencia que existe en la numeración de dos nodos contiguos cualesquiera. Este hecho facilita mucho la resolución, ya que aprovechando esta circunstancia no hace falta trabajar con la matriz completa, que por ejemplo constaría de 90.000 términos para un sistema de 300 incógnitas, y bastaría almacenar y operar sólo con 300 x semiancho de la banda, ya que la matriz es además simétrica.

En general, hay dos tipos de resolución: directa e indirecta.

La indirecta más utilizada es la iterativa de Gauss Seidel, que no es sino una relajación (Ref. B-14).

A partir de una solución inicial " u_j^0 " del sistema $a_{ij} \cdot u_j = F_i$ se obtienen nuevos valores " u_j^r " en la " r -ésima" iteración según la

expresión

$$u_j^r = \frac{1}{a_{jj}} (F_j - a_{ij} u_j^{r-1}) \quad i \neq j$$

hasta que en dos vueltas seguidas todos los valores $u_j^{r+1} - u_j^r$ sean menores de uno prefijado.

El método puede acelerarse con un coeficiente arbitrario "m" según la expresión.

$$u_j^r = u_j^{r-1} + m \left(\frac{F_j - a_{ij} u_j^{r-1}}{a_{jj}} - u_j^{r-1} \right)$$

Debe ser $1 \leq m \leq 2$ y normalmente se toma $1,6 \leq m \leq 1,85$ - que la experiencia demuestra son los mejores valores (Ref. B-49, - pág. 126 a 128).

El primer vector solución suele ser de ceros, a no ser que se conozca una solución aproximada. En el problema de plastificación progresiva que aquí se trata éste método es muy adecuado, pues en el primer escalón de carga elástico partiendo de la solución de ceros se precisarían muchas iteraciones, 300 por ejemplo, pero en los escalones siguientes se puede partir de la solución del escalón anterior, y la convergencia es notablemente más rápida.

Otra ventaja del método es que puede operarse con las diagonales estrictas distintas de cero de la matriz de rigidez, según el procedimiento de White (Ref. B-49, pág. 121) con un ahorro considerable de almacenamiento en el ordenador.

Este método lo emplean Clough (Ref. B-11), Morgenstern (B-36), Arriaga (B-8), Ang y Harper, Lorente de Nó, etc.

De los métodos directos el más simple es el de eliminación de Gauss, a base de triangularizar la matriz. No aprovecha la ventaja de matriz banda al tener que ocupar durante la eliminación todo el triángulo superior que antes eran ceros. Por ese motivo, sólo lo utiliza Connor (Ref. B-15, pág. 55). Existe una variante muy ingeniosa debida a Mc Cormick (Ref. B-34, pág. 40) con la que resuelve sistemas de ... ¡hasta 15.000 ecuaciones!, perfectamente adaptada a las necesidades de un sistema tan grande.

Otro método directo muy adecuado e ingenioso es el de tridiagonalización de la matriz, o de las particiones, debido a Clough, (Ref. B-12, pág. 191, Ref. B-52, pág. 232). El método de sustitución aplicado a un sistema banda de solo tres diagonales resulta muy cómodo; y al tener en general la matriz más de tres diagonales distintas de cero, el artificio que se hace es subdividirla en tres diagonales de submatrices para invirtiendo éstas poderlas eliminar.

$$\begin{bmatrix} K_1 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & K_2 & C_2 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & K_3 & C_3 \dots 0 \\ & & \text{---} & & \\ & & C_{n-2} & K_{n-1} & C_{n-1} \\ & & & C_{n-1} & K_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix}$$

Del primer subsistema de ecuaciones se deduce:

$$u_1 = K_1^{-1} P_1 - K_1^{-1} C_1 u_2$$

entrando en la segunda.

$$(K_2 - C_1^t K_1^{-1} C_1) u_2 + C_2 u_3 = P_2 - C_1^t K_1^{-1} P_1$$

Llamando

$$L_2 = K_2 - C_1^t K_1^{-1} C_1$$

$$Q_2 = P_2 - C_1^t K_1^{-1} P_1$$

Resulta

$L_2 u_2 + C_2 u_3 = Q_2$ quedando un sistema de igual tipo - que el anterior y de tamaño una unidad menor.

Eliminando sucesivamente uno a uno los subvectores incógnitas se obtiene:

$$L_{m+1} = K_{m+1} - C_m^t L_m^{-1} C_m$$

$$Q_{m+1} = P_{m+1} - C_m^t L_m^{-1} P_m$$

y al final el último subsistema $L_n u_n = Q_n$ se resuelve directamente. A continuación se vuelve hacia atrás obteniendo las anteriores incógnitas.

$$u_m = L_m^{-1} Q_m - L_m^{-1} C_m u_{m+1}$$

Este método tiene una interpretación estructural, consistente en unas participaciones imaginarias del sólido. Cada submatriz K_m comprende una serie de nodos, que están incluidos en la partición correspondiente de modo que cada nodo y sus incógnitas sólo entran en esa partición y submatriz K_1 . Cada dos partes contiguas - del sólido se unen por una serie de elementos cuyas matrices elementales de rigidez K_{ij}^e nos relacionan los nodos de una partición con otra formando la matriz C . (Fig. B-13). Esto no es sino una generalización del concepto de matriz de rigidez indicado en el apartado

B-2-2: un conjunto de nodos y elementos forma una partición ó "supernodo" cuya matriz K_m corresponde al K_{ii} del elemento de B-2-1, es decir, constituye la influencia sobre sí mismo, mientras que la matriz C define la interacción entre "supernodos" que se realiza a través de los elementos que atraviesa la frontera entre particiones, obteniéndose C como superposición de las submatrices K_{ij}^e ya citadas.

Las ventajas de este método son: aprovechar la matriz - banda simétrica, almacenando y operando sólo con K_i y C_i . También saca ventaja de que la matriz sea definida positiva, pues gracias a ello se puede utilizar el procedimiento de inversión de Choleski, y en total se necesitan $2 N^3$ multiplicaciones en vez de $3 N^3$ por partición. (Ref. B-23, pág. 62).

Como todo método directo sirve simultáneamente para resolver varios casos de carga (cambio del campo de la elasticidad), y el tiempo total de computador es fijo.

Como contra tiene que para anchos de banda grandes, al elevarse al cuadrado el tamaño de $K_y C$ precisa mucho más tiempo y memoria que los métodos indirectos (Ref. B-12, pág. 201).

Para terrenos sin potencial plástico (dilatancia distinta del rozamiento interno) la matriz de rigidez deja de ser simétrica, necesitándose por ello mayor capacidad de almacenamiento del ordenador, y mayor tiempo de cálculo al requerirse una subrutina de inversión general de matrices no simétricas.

B-5 Introducción de la plastificación

B-5-1 .- Generalidades

Los problemas no lineales pueden resolverse por el método de los elementos finitos, solamente mediante un proceso iterativo, debido al carácter lineal de las ecuaciones del método.

El problema no es simple, pues como indica Connor (Ref. B-15 pág. 60) no solo se trata de introducirlo en la formulación, sino que las técnicas de resolución son mucho más complejas y la elección de variables e interpretación de resultados debe realizarse con juicio y prudencia para alcanzar la solución verdadera.

Algunos problemas simples, tales como el del material que no resiste tracciones o tiene diferente deformabilidad para la compresión que para la tracción, pueden resolverse por un proceso iterativo directo. Se aplica la carga total al terreno suponiéndolo perfectamente elástico y el resultado indica que zonas fisurarían por aparición de tracciones. Se introduce de nuevo la totalidad de la carga, añadiendo unas fuerzas ficticias que se anulan entre sí y que equivalen a las tracciones aparecidas, y así sucesivamente hasta que en el resultado no haya nada más que compresiones (Ref- B-53 pág. 257, Ref. B-47). Suelen precisarse unas 20 iteraciones.

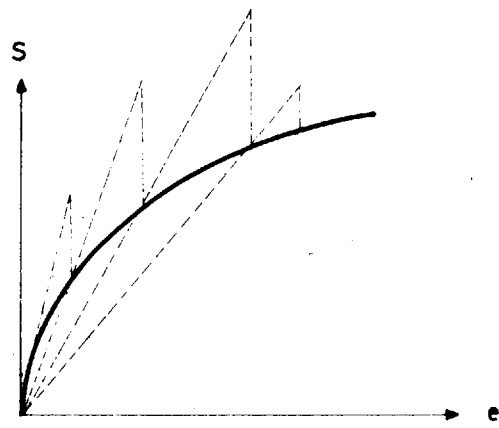
El proceso iterativo directo puede aplicarse también a los cuerpos elásticos no lineales. Se calcula primero para el módulo de Young tangente en el origen, resultando unas tensiones a las que corresponde unos módulos de Young secantes diferentes (Fig. B-14a) con los cuales se repite el cálculo -

hasta conseguir la coincidencia entre los resultados de dos iteraciones consecutivas (Ref. B-52 pág. 193; Ref. B-51 pág. 664). La extensión de este procedimiento a la plasticidad no es lícita según señala A. Serrano (Ref. 3 pág. 44), debido a que no refleja el proceso de carga y las trayectorias de tensiones en cada punto. Efectivamente, al depender las relaciones tensión deformación de cada punto de las tensiones del mismo en ese instante, el proceso de deformación y la propagación de la zona plastificada viene condicionado por la historia tensional de cada elemento, y para resolver el problema se hace necesario el aplicar un método iterativo incremental, que reproduzca la evolución de las tensiones al progresar poco a poco las fuerzas exteriores. (Hill, Ref. A-16, pág. 238).

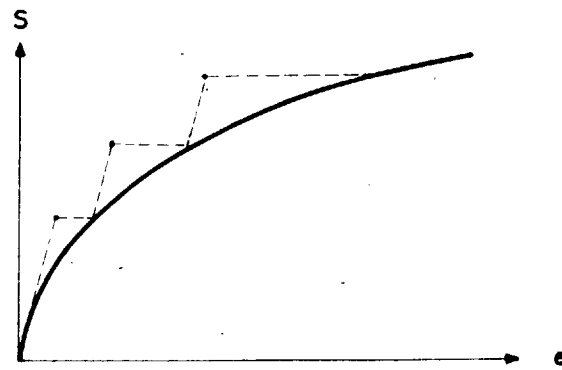
El método incremental tiene dos variantes (Ref. B-37): La primera se podría denominar "de incrementos de carga y deformaciones iniciales ficticias". En ella se separan las deformaciones elásticas y las plásticas, y para cada incremento de carga se obtienen las primeras como si se tratase de un problema elástico normal, utilizando el artificio de considerar las deformaciones plásticas, supuestas conocidas, como debidas a una deformación térmica o unas tensiones iniciales (Fig. B-15 b), a continuación se obtienen las tensiones, y a partir de ellas las deformaciones plásticas, según la ecuación del apéndice A.

$$\Delta e_i^P = \lambda \frac{df}{ds_i}$$

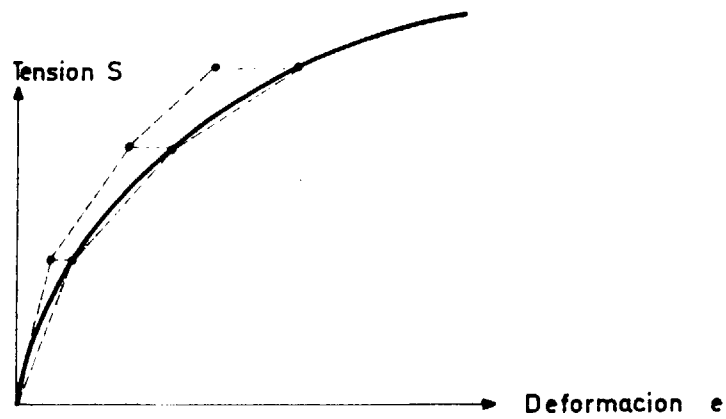
Al no conocer a priori el incremento de las deformaciones plásticas, se presupone que son iguales a las del escalón anterior, con lo cual las deformaciones plásticas obtenidas no coinciden con las supuestas, pero con incrementos de carga pequeños es suficientemente aproximado. Sin embargo es más correcto y más exacto el realizar una segunda iteración dentro de cada incre



a



b



c

Fig. 14

deformaciones plásticas obtenidas, hasta conseguir la coincidencia de resultados de dos iteraciones consecutivas. Según los estudios de Argyris (Ref. B-7 pág. 635), lo más práctico a fin de obtener igual precisión con tiempo de cálculo mínimo, es realizar esta doble iteración, que permite dar escalones de carga bastante mayores, bastando en cada uno con repetir los cálculos de 3 a 5 veces.

El método, propuesto separadamente por Mendelson, Callenger y posteriormente por Argyris (Ref. B-7; Ref. B-52 pág. 196; Ref. B-51 pág. 664), tiene la ventaja de que basta con invertir la matriz de rigidez elástica del sistema una sola vez, con un considerable ahorro de tiempo. Tiene en cambio la limitación de no ser aplicable a cuerpos elastoplásticos perfectos, no rigidizables, que son los aquí tratados, en los cuales conocida la tensión no es posible determinar la deformación plástica al no existir una correspondencia biunívoca.

La segunda variante incremental es la de la matriz de rigidez tangente. En él para cada incremento de carga se obtiene, con las relaciones tensiones deformación del momento, la matriz de rigidez del sólido y se resuelve el problema en corrimientos totales (elásticos más plásticos), como si se tratase de un problema elástico anisotrópico con unas constantes elásticas ficticias. Tiene el grave inconveniente del tiempo de cálculo, ya que en cada incremento de carga hay que repetir todo el proceso. Además de ser válido para cuerpos elastoplásticos perfectos, y no solo rigidizables, su principal ventaja radica en su mayor rigor teórico. Con este procedimiento se sigue el proceso real de deformación del terreno determinando las trayectorias de las tensiones en cada punto, y por ese motivo, por seguir paso a paso al fenómeno físico reproduciéndolo en cada instante, la solución a la que se llega debe ser -

La aplicación al método de los elementos finitos requiere el calcular para cada incremento de carga la matriz (D) de la ecuación (4) en cada punto plastificado, repitiendo todos los cálculos hasta obtener el sistema (10).

Como en la variante anterior, es factible el realizar este proceso incremental directamente, requiriéndose escalones de carga pequeños para tener la precisión adecuada; e es posible también el iterar de nuevo en cada incremento de carga para no trabajar con la matriz "tangente" a la ley de tensión deformación en el comienzo del escalón, sino hacerlo con una "secante" de modo que los errores sean menores y no sean acumulativos. Debido a que para cada iteración hay que cambiar la matriz de rigidez e invertirla, este refinamiento de la doble iteración no resulta tan ventajoso en este método.

B-5-2 Método incremental de la matriz de rigidez tangente.**Variantes existentes:**

Este método de la matriz de rigidez tangente, por ser el más riguroso, es el más empleado. Seguidamente se pasa revista a sus diversas modalidades con más detalle.

La mayoría de los autores tras la primera carga que alcanza el límite elástico en un punto, van dando incrementos de carga, tales que sólo plastifiquen otro punto o elemento más. Con ello se sustituye la ley de tensión-deformación por una poligonal cuyos segmentos son paralelos a las tangentes a dicha ley en los puntos donde comienza cada escalón de carga. Para mallas relativamente tupidas en que el número de puntos o nodos es alto, al irse plastificando de uno en uno se requieren incrementos de carga muy pequeños. Por ejemplo Angy Harper muestran incrementos medios de un 6% de la carga que inicia la plastificación (Ref. 3 pág. 414) para un problema determinado, y de un 0,4% (Ref. 3 pág. 410) para otro; Fort (Ref. 12 figuras) muestra incrementos del 3% al 10%. La precisión por tanto se mantiene, pero a costa de un gasto de tiempo muchas veces inútil; en el ejemplo antes citado (Ref. 3 pág. 410) con un aumento del 6% de la carga se pasa de la iniciación de la plastificación a la rotura total, y para ello hay que resolver 16 veces el problema elástico, modificando otras tantas veces la matriz de rigidez del sistema al plastificarse sucesivamente 16 elementos. Otros problemas, por el contrario requieren un incremento de carga apreciable para plastificar un nuevo punto, por ejemplo un 22% en el ejemplo de la Ref. 3 pág. 415, y esto ya es excesivo, pues la linealización de las leyes -

tensión-deformación resulta muy grosera.

Este sistema, seguido también por Lorente de N₀ (Ref. 20), Cristian (Ref. B-18; Ref. B-27) y Pope (Ref. B-39) tiene por tanto el inconveniente de que la precisión o el tiempo de ordenador puede dañarse en parte al tratar un problema plástico u otro.

Una forma de evitar esto consiste en dar incrementos de carga prefijados, suficientemente pequeños y apropiados al problema que se trate. El primer inconveniente que se ve es el de los puntos que plastifican durante dicho incremento de carga, y que han intervenido en los cálculos como si fueran elásticos; Tamuly Phukan (Ref. B-36 pág. 316) no corrige adecuadamente este defecto, pero otros autores como Reyes (Ref. B-41 - pág. 481) y Marcal (Ref. B-33 pág. 146) sí; el último en esta zona de transición toma un coeficiente de rigidez del elemento promediando el elástico y el elastoplástico.

$$\frac{ds_1}{de_1} = m \left(\frac{ds_1}{de_1} \right) + (1-m) \left(\frac{ds_1}{de_1} \right)_{\text{plast.}}$$

donde "m" se estima en base a los incrementos de tensiones que sufrió el elemento en el escalón de carga precedente.

A fin de poder dar escalones de carga algo mayores - Reyes y Morgenster aplican la doble iteración citada párrafos antes. Morgenstern (Ref. B-36), Akyuz (Ref. B-3) y Crose (Ref. B-47 pág. 991) para cada aumento de cargas con la matriz de rigidez "tangente" obtiene una primera solución de desplazamientos y tensiones, y con estos recalcula una matriz "secante" tantas veces sea necesario hasta conseguir la convergencia deseada. Reyes (Ref. B-41) con un celo excesivo llega en cambio

a aplicar una iteración triple, lo cual debe considerarse - innecesario y poco práctico; no obstante se expone con mayor detalle su método por el gran esfuerzo que supone y por ser en teoría el más riguroso.

Para el incremento de carga "m" sino resuelve la ecuación.

$$(K)_{m-1} \Delta \vec{d}_m = \Delta \vec{F}_m \quad (10)$$

y obtiene unas tensiones

$$\vec{S}_m = \vec{S}_{m-1} + (D)_{m-1} \Delta \vec{q}_m \quad (42)$$

Debido a que la matriz $(D)_{m-1}$ tangente al principio del incremento ha cambiado a lo largo de éste, realiza una iteración con las tensiones (Ref. B-41 pág. 481) \vec{S}_m ya obtenidas, obteniendo corregida $(D)_{m-1}$ y a partir de esta $\vec{S}_m^{r+1} = \vec{S}_{m-1} + (D)_{m-1}^r \Delta \vec{q}_m$

Una vez conseguida la convergencia (normalmente con solo 3 iteraciones) corrige el error introducido por la linealización de la matriz de rigidez. Efectivamente $(K)_{m-1}$ se calculó a partir de \vec{S}_{m-1} , y ahora se conocen unas nuevas tensiones \vec{S}_m^r que han hecho evolucionar (K) a lo largo del incremento de carga; por lo tanto los desplazamientos \vec{d}_m que verifican (10) no verificarán

$$(K)_m \Delta \vec{d}_m = \Delta \vec{F}_m$$

dando un residuo

$$\vec{F}_m' = \Delta \vec{F}_m - (K)_m \Delta \vec{d}_m$$

Reyes resuelve de nuevo el sistema (10) para estas nuevas cargas "q" veces, tantas como haga falta (normalmente tres) hasta alcanzar residuos despreciables (Ref. B-41 pág. 482)

$$(K)_m^q \Delta \vec{d}_m^{q+1} = \Delta \vec{F}_m^q$$

y con ello la verdadera solución de desplazamientos será

$$\bar{d}_m = \bar{d}_m^0 + \dots + \bar{d}_m^q$$

con la cual de nuevo corrige las tensiones (42)

Desde el punto de vista de programación y cálculo el método es complejísimo, pues hay que recalcular (D) y (K) muchas más veces, siendo dudoso que la mayor precisión obtenida compense ese esfuerzo. Aparte de ello el trabajo de Reyes parece tener varios errores. En las leyes tensión-deformación (Ref. B-41 pág. 479), que deduce por un camino muy largo, quizá por ignorar el artículo original de Drucker y Prager en que se ha basado. También, como indica Castillo Ron, las iteraciones que él plantea no son correctas y deberían hacerse con $(D)_{m-0,5}$ y con $(K)_{m-0,5}$ en lugar de $(D)_{m-1}$ y $(D)_m$ y con $(K)_{m-1}$ y $(K)_m$ pues Reyes pasa de la matriz "tangente" en el comienzo del intervalo a la "tangente" en el final, en lugar de tomar una intermedia "secante" que sería lo adecuado.

Para el problema que aquí se trata, tras estudiar los resultados numéricos de Fort (Ref. 42) se llega a la conclusión de que con intervalos de carga relativamente pequeños es innecesario el uso de las iteraciones dobles en (K) y (D) de Reyes, e incluso la iteración simple en (K) de Morgenstern (Ref. B-36) y Marcal (Ref. B-33 pág. 147) y basta en general con proveer el incremento ^{de} tensión del escalón de carga siguiente para utilizar $(K)_{m-0,5}$ en el sistema (41) y $(D)_{m-0,5}$ en las ecuaciones (42). Haciendo los incrementos de carga constantes, es lógico suponer que el incremento de tensión es igual al del escalón anterior, y efectivamente se ha comprobado que para incrementos de carga de hasta el 15% ello es más exacto en la evaluación de (D) y (K) que el suponer que son nulos

B-6.- Programa de cálculo electrónico.

Se ha realizado un programa de elementos finitos en lenguaje FORTRAN, para las máquinas IBM 360 y 1.130. Dicho programa se ha procurado sea bastante general, con vistas a futuras investigaciones personales o de otros doctorados.

El programa es apto para la resolución de problemas -- planos (tensión plana o deformación plana) en elasticidad o en elastoplasticidad para sólidos con cohesión o con rozamiento, o -- ambos casos a la vez, permitiendo la introducción de cuerpos no -- homogéneos y también, en el caso de elasticidad, de cuerpos anisotrópicos. Para tratar el problema del talud se ha creado una sub-rutina especial que forma automáticamente la malla de elementos del mismo, adaptada a sus características geométricas, que ahorra la -- engorrosa preparación y perforación de datos, evitando además posibles errores humanos. Se ha confeccionado también otra sub-rutina más general apta para definir cualquier tipo de malla y contorno, para el estudio de otros problemas.

Resulta factible, con pequeños cambios, el adoptar a este programa nuevos criterios de plastificación; tales como el de Roscoe, más de acuerdo con el comportamiento real de los suelos, -- y que queda como probable camino a seguir en el futuro.

En el apéndice C se incluye el listado de instrucciones del programa.

B-6-1. Variables escogidas.

De los dos métodos de discretización del continuo hoy día en uso, se ha escogida el de los elementos finitos por resultar más flexible para adaptarse a diferentes contornos que el de Ang y Harper (Ref. 17) cuyos nodos o puntos deben respetar una cuadrícula regular o todo lo más de rombos, según la adaptación de Lorente de Nó (Ref. B-32).

Dentro de este método la primera elección a realizar es el tipo de elementos. Se vió en el apartado B-4-1 que para problemas elásticos y de terrenos homogéneos se debe ir a elementos grandes muy refinados; en nuestro caso, que se desea observar la forma de plastificarse progresivamente el talud, los elementos ya plastificados constituyen una no homogeneidad y para representarla se precisa de elementos pequeños. Por ello la elección está entre el triángulo simple, con deformación constante, o el cuadrilátero.

Este último requiere un mayor esfuerzo de programación y mayor tiempo de cálculo para formar la matriz de rigidez, por lo que, pese a reconocer su superioridad, se ha desechado. Según esto se debía desembocar en el paralelogramo (Fig. B-8-b), que tiene la misma precisión y es más sencillo de programar y se adapta bien al contorno del talud, pero también se ha dejado a un lado por el deseo de crear un programa más general, a fin de usarse posteriormente para el estudio de otros problemas de Mecánica de Suelos. Concretamente está ya en estudio el caso de talud vertical contenido por una pantalla anclada por parte de D. Enrique Casti--llo Ron, y el de un túnel por parte de D. Cesar Sagaseta Millan y este último problema tiene un contorno al que no se adapta el paralelogramo.

El triángulo con deformación constante tiene la ventaja

elásticas y plásticas.

Elegido por las razones anteriores el triángulo, existía la posibilidad de "condensarlo" en cuadriláteros, según la técnica de Wilson, que es un artificio en general recomendable, y que respeta en principio la flexibilidad de forma del elemento; sin embargo, tampoco no se hizo esto debido a haber tomado por guía el método de programa de Cheung (Ref. B-52 Cap. 15).

Para la resolución del sistema la balanza queda muy equilibrada entre el método directo de tridiagonalización o de las particiones, y el iterativo de Gauss Seidel acelerado (apartado B-4-3.)

Ambos aprovechan satisfactoriamente la propiedad de matriz banda simétrica, aunque el primero precisa de una capacidad de almacenamiento doble (opera con las matrices K_2 y C_2 enteras y el de Gauss-Seidel con la mitad de ellas).

Al tratarse de un problema plástico, donde la historia de la carga es determinante, ambos deben resolver las distintas hipótesis de carga de una en una, perdiendo así el método directo la ventaja que tiene en elasticidad de resolver varias hipótesis de carga simultáneamente.

El método directo asegura la resolución del problema en un tiempo fijo, mientras que con el método iterativo, que suele tardar en general menos, se corre el riesgo de que no sea así. El mayor peligro de la inversión de matrices, que es el de operar con números muy altos, desaparece prácticamente al trabajar con valores adimensionales.

Durante las iteraciones plásticas el método iterativo - arranca de una solución inicial más exacta que la grosera suposición de igualar las incógnitas a ceros y con ello ahorra gran cantidad de tiempo. Pero algo parecido le ocurre al método de la tridiagonalización, pues en él si los elementos plastificados están en las últimas particiones, sólo hay que invertir las últimas submatrices K_1 ; para aprovechar bien esta ventaja los datos deben administrarse por el orden adecuado para que la zona de plasticidad contenida del sólido en estudio lleve la numeración de elementos y particiones más alta.

La elección es difícil, y como ya se indicó, la mitad de los autores escogen una solución y la otra mitad la otra. En este caso se ha elegido el método de tridiagonalización, pese a la ventaja apreciable del de Gauss-Seidel para matrices de banda muy ancha (cosa bastante frecuente). Debe advertirse que esta elección es importante, pues de ella depende el tiempo total de ordenador empleado, y además, puede condicionar el resto del programa, como es el proceso de iteración plástica.

Para el estudio de la progresión de la zona plástica contenida se utiliza el procedimiento incremental de cargas, de la matriz de rigidez "tangente".

El otro posible método a emplear de la "rigidez inicial con deformaciones iniciales ficticias" no es utilizable aquí por tratarse de un cuerpo elastoplástico perfecto. Por otro lado la conclusión de Whang (Ref. B-48) es que es inferior en precisión al de la rigidez tangente.

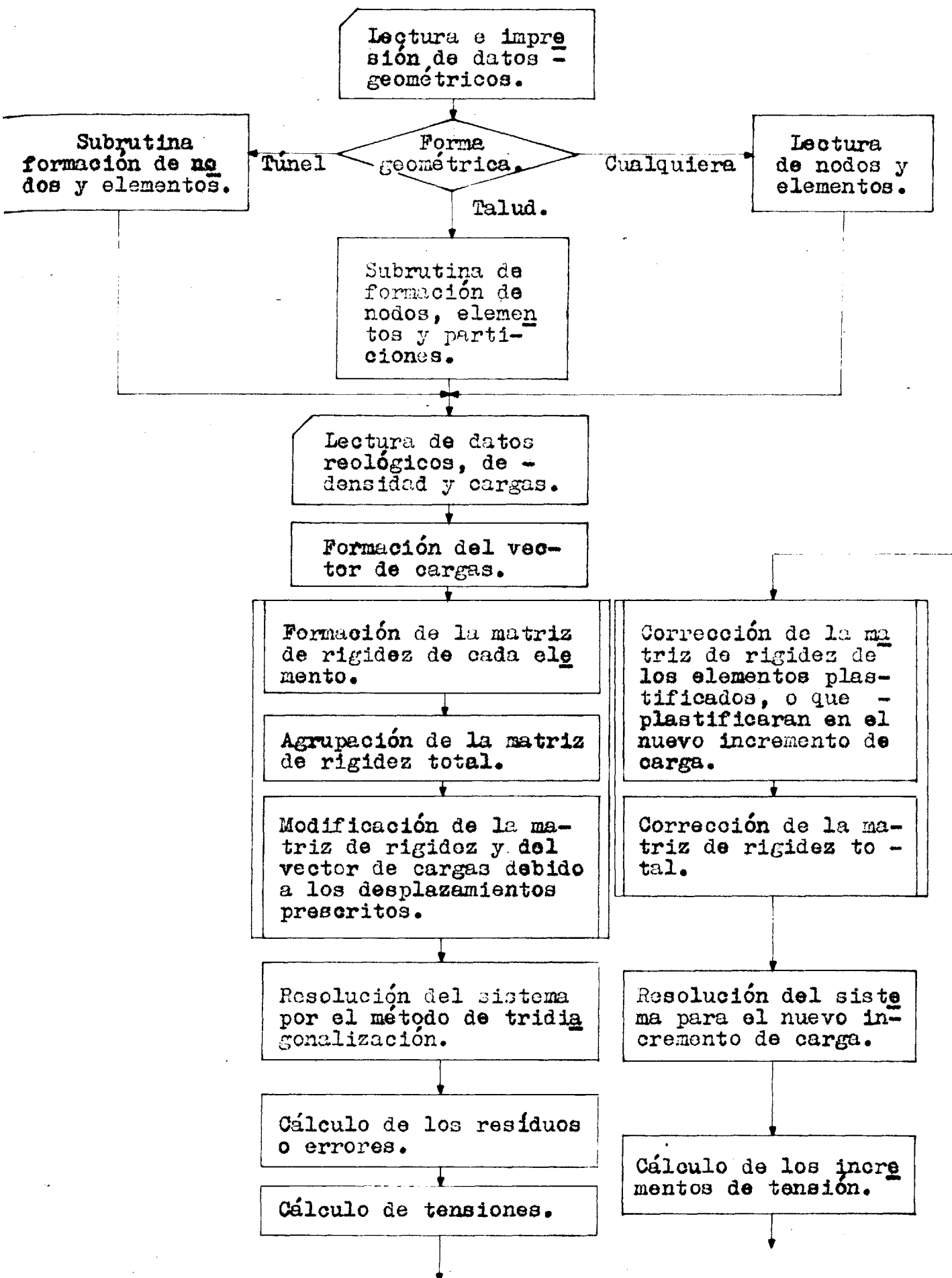
Se dan a partir del comienzo de la rotura aumentos de carga constantes, y se obtiene una matriz de rigidez secante en el

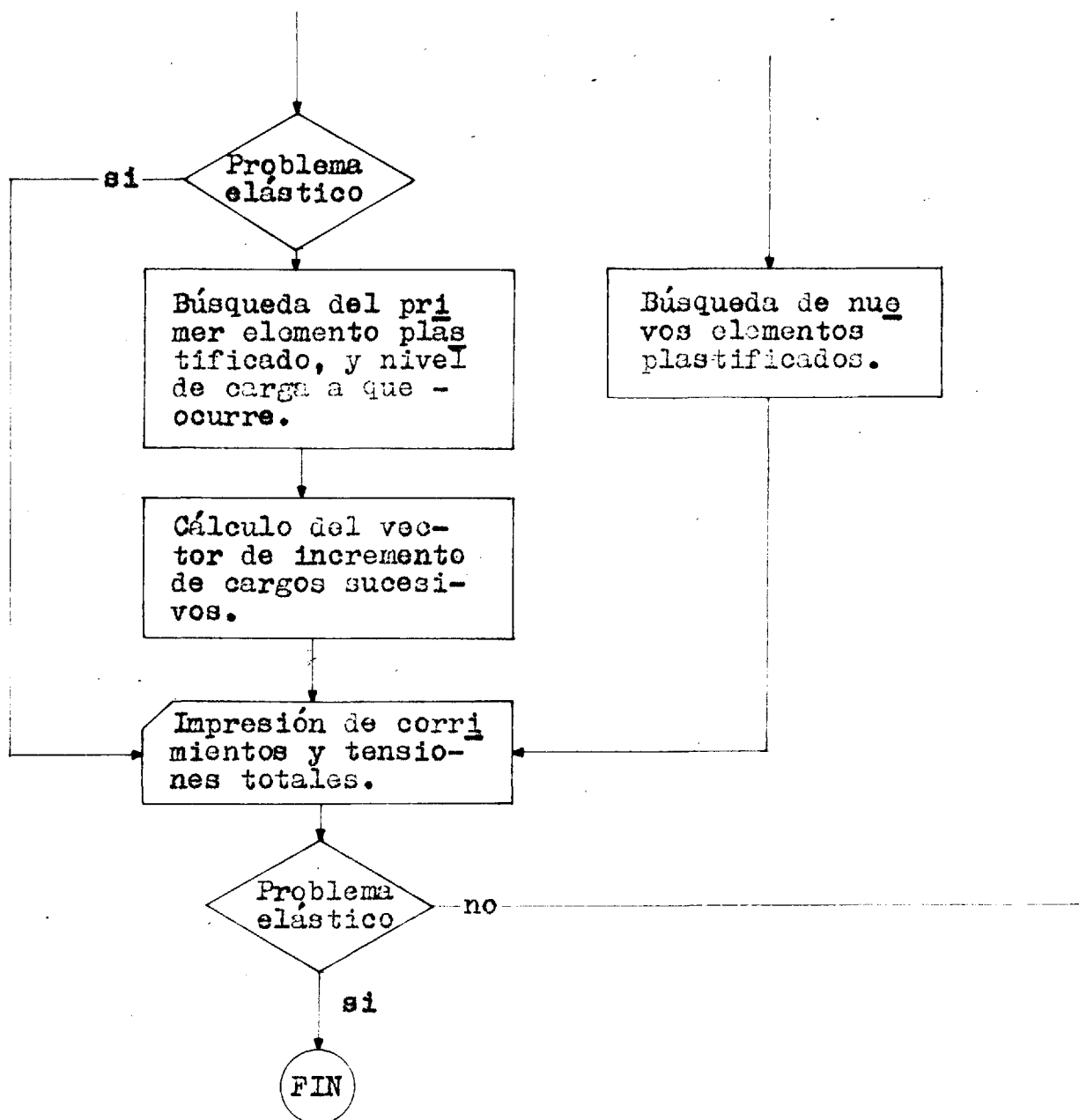
intervalo de carga, a base de presuponer cuales serán los incrementos de tensión que aparecerán en él.

A fin de aumentar la precisión, las tensiones se calculan promediando los de cada dos triángulos contiguos.

El mayor esfuerzo se ha realizado en lo relativo al criterio de plastificación empleado, utilizándose las teorías más rigurosas, ya que este es el punto más débil de la mayoría de los autores consultados. Se emplea como modelo de terreno el elastoplástico perfecto con el criterio de rotura de Mohr Coulomb, que tiene la ventaja de poder contrastar los resultados con teorías y aplicaciones anteriores, como son estabilidad de taludes calculadas por división en fajas ó por el método de Sokolowsky (taludes isorresistentes). Finalmente se ha añadido otro modelo de terreno, que es el de Mohr Coulomb con dilatancia constante prefijada (a la cohesión " c " y rozamiento " ϕ " se añade un tercer parámetro que es la dilatancia " v " distinta de ϕ), realmente interesante para el estudio de suelos, - pues según la experimentación se acomoda mucho más a la realidad.

Como este terreno carece de potencial plástico, la matriz de rigidez no es simétrica, y ello ha obligado a realizar más modificaciones creando un segundo programa de cálculo electrónico algo más complejo y lento que el primero.

B 6-2.- Organigrama.



B-6-3.- Manejo del programa

Los datos a suministrar al ordenador son los siguientes:

Forma y dimensiones generales del talud, y tamaño y número de los elementos, así como los desplazamientos prescritos en el contorno.

Características reológicas del sólido incluyendo hasta 5 constantes elásticas (caso de anisotropía transversal, y valores de rozamiento, de la cohesión y dilatación para cada tipo de terreno.

Cargas exteriores, puntuales sobre los nodos y fuerzas másicas debidas a la gravedad.

Los resultados que imprime el ordenador son:

Coordenadas de los nodos y elementos en que se ha descompuesto el terreno.

Particiones ideales para la resolución del sistema por el método de tridiagonalización.

Datos de las propiedades reológicas del terreno o terrenos.

Datos de cargas exteriores y fuerzas nodales totales equivalentes, incluyendo el peso propio.

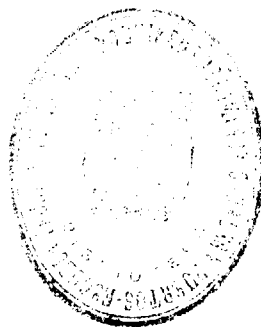
Una vez resuelto el sistema dentro de la teoría elástica:

Tanto por uno de las fuerzas o del peso propio que inicia la plastificación. Corrimientos de los nodos y tensiones según los ejes coordinados y tensiones principales para cada pareja de elementos en el instante de terminar la fase elástica.

Tanto por uno de los Incrementos de carga sucesivos y estado de corrimientos nodales y tensiones elementales al final de dichos incrementos, así como valor relativo del criterio de plastificación en cada elemento.

Apéndice C

PROGRAMA DE CALCULO



APENDICE -C-
=====

LISTADOS DEL PROGRAMA
=====

DE CALCULO
=====

Programa y subrutinas empleados
 =====

Programadores: Cañizo Perate, Castillo Ron, Sagaseta Millán (por orden alfabético).

Ordenador: IBM 11-30 de 32 K, con disco.

Programa: PLEF 1

Pág. 5

Cálculo por el método de elementos finitos de la plastificación pro
 gresiva de un terreno coulombiano con dilatancia prefijada.

Subrutinas

PENOD : lectura de datos de una malla cualquiera (no se incluye el listado a
 continuación).

TALEX : formación de la malla de nodos y elementos de un talud. Pág. 8

TUNEX : Idem de un tunel (no se incluye el listado).

CAREX : lectura y formación de las cargas y propiedades reológicas. Pág. 11

MATEF : formación de la matriz de rigidez. Pág. 15

SOLEF : resolución del sistema. Pág. 22

TINVF : subrutina de inversión de matrices (no se incluye el listado).

PIAEX : cálculo de tensiones, grado de plastificación e incrementos sucesivos.

: Impresión de resultados. Pág. 26

Listado de variables y datos
 =====

AN	= ángulo de eje de anisotropía con la horizontal.
AUM	= tanto por uno de incremento de cargas en cada iteración plástica.
B	= matriz corrimiento deformación de un elemento.
BV	= valor del desplazamiento prescrito de cada nodo.
C	= matriz de rigidez de un elemento (o incremento de la matriz).
CFI	= coseno de ϕ .
CO	= cohesión.
D	= matriz tensión deformación.
DB	= matriz tensión corrimiento de un elemento.
DENS	= densidad (vertical, eje "y").
DPLA	= incremento del grado de plastificación.
EARTH	= fuerza másica (horizontal, eje "x").
E 1	= módulo de Young según el eje de anisotropía.
E 2	= módulo de Young en la dirección de los estratos.
F	= términos independientes del sistema, al resolver por sustitución.
FPLA	= grado de plastificación.
GE	= módulo de rigidez.
IELAS	= vale "uno" si es un problema plástico.
INUEV	= vale "uno" si se van a resolver varios problemas.
IPLAS	= positivo para los elementos plastificados.
ISCAR	= vale "uno" si hay cargas sucesivas.
LIMP	= vale "uno" si hay carga límite.
LMEN	= primera partición plastificada.
NB	= "uno" si tiene desplazamiento prescrito el nodo.
NBOUN	= número de nodos con desplazamiento prescrito.
NCAR	= número de vectores de carga.
NCOLN	= vale "uno" si hay tensiones iniciales.

NCONC	= número de cargas concentradas.
NELEM	= número de elementos.
NEM	= tamaño de la partición máxima.
NEND	= último elemento de cada partición.
NEP	= tipo de material de cada elemento.
NF	= número del nodo con desplazamiento prescrito.
NFAS	= número de fases de excavación o construcción.
NFIRS	= primer nodo de cada partición.
NLAST	= último nodo de cada partición.
NOD	= número de los nodos de cada elemento.
NP	= vale "uno" si es tensión plana.
NPART	= número de particiones.
NPOIN	= número de nodos.
NYM	= número de terrenos distintos.
NYMI	= número de zonas de terreno distinto..
P 1	= coeficiente de Poisson según el eje de anisotropía.
P 2	= coeficiente de Poisson según los estratos.
SNU	= ángulo de dilatación.
ST	= matriz de rigidez de cada partición.
ST 1	= matriz de rigidez de la partición siguiente.
ST 2	= matriz de rigidez que relaciona la partición siguiente con cada una (si hay función potencial plástico es la transpuesta de parte de ST y no se calcula).
TED	= incremento de tensión.
TEN	= tensión acumulada en el baricentro de cada pareja de elementos.
TFI	= ángulo de rozamiento interno.
U	= vector de cargas actuante.
UD ,	= incrementos de desplazamientos, solución del sistema.
UT	= corrimiento total, de varias iteraciones o hipótesis de carga.
X	= coordenadas de cada nodo.
XE	= coordenadas de los nodos de un elemento.

PAGE 6

NN FOR

*LIST ALL

*IOCS(2501 READER,1403 PRINTER,1442 PUNCH,DISK)

*ONE WORD INTEGERS

DEFINE FILE 8(1300,56,U,NS),9(260,36,U,ND)

DIMENSION X(150,2),NOD(250,3),NSTAR(18),NLA(18),NFIRS(18),NEND(18)

DIMENSION NF(34),NB(34,2),BV(34,2,2),E1(4),E2(4),P1(4),P2(4),GE(4)
 1,CO(4),TFI(4),NEP(250),AN(250),XE(3,2),IPLAS(250),CFI(4),SNU(4)
 2,ST(28,56),ST1(28,28),TED(375),FPLA(125),DPLA(125),AUM(2)
 3,UD(300,1),F(300,1),U(300,2),TEN(375,1)
 4,DENS(4),EARTH(4)

DIMENSION ALFA(15)

COMMON X,DELT,BV,E1,E2,P1,P2,GE,CO,TFI,AN,UD,U,XE,CO1,GE1
 1,CFI,ST,ST1,TEN,TED,FPLA,DPLA,F,AUM,FPL1,SNU,ALAN,DENS,EARTH
 COMMON JI,JJ,NPOIN,NPART,KE1,NEM,NELEM,NBOUN,NYM,NCONC,NCOLN,IELAS
 1,NP,LMEN,NS,ND,IP,LIMP,NCAR1,ISCAR,NFAS,LIM1,IU
 2,IER,NOD,NEND,NFIRS,NLA,NSTAR,NF,NB,NEP,IPLAS,NCAR,IFAS,ICAR
 3,ICAF,INUEV

JI=8

JJ=5

READ(JI,31)ALFA

WRITE(JJ,32)ALFA

READ(JI,23)NPART,NPOIN,NELEM,NP,IELAS,LIMP,NEM,INUEV,IFORM,NCAR

WRITE(JJ,23)NPART,NPOIN,NELEM,NP,IELAS,LIMP,NEM,INUEV,IFORM,NCAR

KE1=NELEM*0.25

KE1=NELEM-KE1*4

IF (KE1) 36,37,36

36 KE1=NELEM+4-KE1

GO TO 40

37 KE1=NELEM

40 CONTINUE

IF(IFORM)11,12,13

11 CALL TUNEX

GO TO 14

12 CALL PENOX

GO TO 14

13 CALL TALEX

14 CONTINUE

CALL CAREX

CALL LINK(PLF2)

23 FORMAT(14I5)

32 FORMAT(1H1,15A4N)

31 FORMAT(15A4)

END

VARIABLE ALLOCATIONS

X(RC)=7FFE-7DA8	DELT(RC)=7DA6	BV(RC)=7DA4-7C96	E1(RC)=7C
P2(RC)=7C7C-7C76	GE(RC)=7C74-7C6E	CO(RC)=7C6C-7C66	TFI(RC)=7C
U(RC)=7810-7362	XE(RC)=7360-7356	CO1(RC)=7354	GE1(RC)=73
ST1(RC)=6708-60EA	TEN(RC)=60E8-5DFC	TED(RC)=5DFA-5B0E	FPLA(RC)=5B
AUM(RC)=56C0-56BE	FPL1(RC)=568C	SNU(RC)=56BA-5684	ALAN(RC)=56
JI(IC)=56A1	JJ(IC)=56A0	NPOIN(IC)=569F	NPART(IC)=56
NELEM(IC)=569B	NBOUN(IC)=569A	NYM(IC)=5699	NCONC(IC)=56
NP(IC)=5695	LMEN(IC)=5694	NS(IC)=5693	ND(IC)=56
NCAR1(IC)=568F	ISCAR(IC)=568E	NFAS(IC)=568D	LIM1(IC)=56
NOD(IC)=5689-539C	NEND(IC)=539B-538A	NFIRS(IC)=5389-5378	NLA(18)=53

PAGE 18

NN FOR

*LIST ALL

*IOCS(2501 READER,1403 PRINTER,1442 PUNCH,DISK)

*ONE WORD INTEGERS

DEFINE FILE 8(1300,56,U,NS),9(260,36,U,ND)

DIMENSION X(150,2),NOD(250,3),NSTAR(18),NLAST(18),NFIRS(18),NEND(18)

DIMENSION NF(34),NB(34,2),BV(34,2,2),E1(4),E2(4),P1(4),P2(4),GE(4)

1,CO(4),TFI(4),NEP(250),AN(250),XE(3,2),IPLAS(250),CFI(4),SNU(4)

2,ST(28,56),ST1(28,28),TED(375),FPLA(125),DPLA(125),AUM(2)

3,UD(300,1),F(300,1),U(300,2),TEN(375,1)

4,DENS(4),EARTH(4)

COMMON X,DELT,BV,E1,E2,P1,P2,GE,CO,TFI,AN,UD,U,XE,CO1,GE1

1,CFI,ST,ST1,TEN,TED,FPLA,DPLA,F,AUM,FPL1,SNU,ALAN,DENS,EARTH

COMMON JI,JJ,NPOIN,NPART,KE1,NEM,NELEM,NBOUN,NYM,NCONC,NCOLN,IELAS

1,NP,LMEN,NS,ND,IP,LIMP,NCAR1,ISCAR,NFAS,LIM1,IU

2,IER,NOD,NEND,NFIRS,NLAST,NSTAR,NF,NB,NEP,IPLAS,NCAR,IFAS,ICAR

3,ICAF,INUEV

ICAF=0

IFAS=0

1029 IF(ISCAR)100,100,101

100 IF(NFAS)105,105,102

102 GO TO 109

101 IF(IP)905,905,103

905 WRITE(JJ,7001)ICAR

GO TO 105

103 IF(IU)105,105,113

113 AUM(1)=AUM(ICAR)

IF(FPL1-1.)114,115,115

115 AM=AUM(1)

GO TO 116

114 AM=1.

116 DO 117 I=1,NPOIN

I1=2*I-1

I2=I1+1

U(I1,1)=U(I1,ICAR)*AM

117 U(I2,1)=U(I2,ICAR)*AM

105 CALL MATEF

CALL SOLEF

IF(IER)109,1019,109

1019 CALL PLAEX

IF(IELAS)1026,1026,1030

1030 IF(IP)1024,1024,1025

1024 NIT=0

IP=1

WRITE(JJ,2000)

2000 FORMAT(N,' FIN DEL ESCALON ELASTICO')

WRITE(JJ,500)

500 FORMAT(1H1)

IF(FPL1)1026,1026,3002

3002 IF(FPL1-1.)1033,1029,1029

1033 IF(LIMP)1029,1029,1026

1025 IF(IU)8001,8001,8002

8001 NIT=NIT+1

ANIT=NIT

WRITE(JJ,25)NIT

PAGE 19

```

25 FORMAT(N,' FIN DE LA ITERACION PLASTICA NUMERO',I4)
GO TO 8003
8002 IU=IU-1
8003 WRITE(JJ,500)
      IF(LIMP)1029,1029,1052
1052 IF(IPL)7002,7002,7003
7002 FP=1.0FPL1
      GO TO 7004
7003 FP=ALAN
      IPL=0
7004 COMP=(1.+ANIT*AUM(1))*FP
      IF(COMP-1.)1029,1026,1026
1026 IF(ISCAR)106,106,107
107 IF(ICAR-NCAR1)108,109,109
108 ICAR=ICAR+1
      IP=1
      NIT=0
      WRITE(JJ,7001)ICAR
7001 FORMAT(N,' VECTOR DE CARGA NUMERO',I3,NR)
      IU=2
      GO TO 1029
106 CONTINUE
109 IF(INUEV)999,999,20
999 CALL EXIT
20 CALL LINK(PLF1)
END

```

VARIABLE ALLOCATIONS

X(RC)=7FFE-7DA8	DELT(RC)=7DA6	BV(RC)=7DA4-7C96	E1(RC)=7C
P2(RC)=7C7C-7C76	GE(RC)=7C74-7C6E	CO(RC)=7C6C-7C66	TFI(RC)=7C
U(RC)=7810-7362	XE(RC)=7360-7356	CO1(RC)=7354	GE1(RC)=7C
ST1(RC)=6708-60EA	TEN(RC)=60E8-5DFC	TED(RC)=5DFA-5B0E	FPLA(RC)=5E
AUM(RC)=56C0-56BE	FPL1(RC)=56BC	SNU(RC)=56BA-56B4	ALAN(RC)=5E
J1(IC)=56A1	JJ(IC)=56A0	NPOIN(IC)=569F	NPART(IC)=5E
NELEM(IC)=569B	NBOUN(IC)=569A	NYM(IC)=5699	NCONC(IC)=5E
NP(IC)=5695	LMEN(IC)=5694	NS(IC)=5693	ND(IC)=5E
NCAR1(IC)=568F	ISCAR(IC)=568E	NFAS(IC)=568D	LIM1(IC)=5E
NOD(IC)=5689-539C	NEND(IC)=539B-538A	NFIRS(IC)=5389-5378	NLAST(IC)=5E
NB(IC)=5331-52EE	NEP(IC)=52ED-51F4	IPLAS(IC)=51F3-50FA	NCAR(IC)=5C
ICAF(IC)=50F6	INUEV(IC)=50F5	AM(R)=000E	ANIT(R)=0C
I(I)=0016	I1(I)=0017	I2(I)=0018	NIT(I)=0C

STATEMENT ALLOCATIONS

2000 =0025	500 =0035	25 =0038	7001 =004E	1029 =0082	100 =0086
113 =009C	115 =00AE	114 =0086	116 =00BA	117 =00E1	105 =00FE
1033 =012C	1025 =0132	8001 =0136	8002 =0149	8003 =014F	1052 =0157
107 =0182	108 =0188	106 =01A2	109 =01A2	999 =01A6	20 =01A7

FEATURES SUPPORTED

ONE WORD INTEGERS

IOCS

CALLED SUBPROGRAMS

MATEF	SOLEF	PLAEX	FSUB	FMPY	FMPYX	FOIV	FLD	FLDX
SFIO	SIOI	SUBSC	PRNZ	SDFIO	PNCHZ			

REAL CONSTANTS

.100000E 01=0020

PAGE 4

NN FOR

*LIST ALL

*ONE WORD INTEGERS

SUBROUTINE TALEX

```

    DIMENSION X(150,2),NOD(250,3),NSTAR(18),NLAST(18),NFIRS(18),N
    18)

```

```

    DIMENSION NF(34),NB(34,2),BV(34,2,2),E1(4),E2(4),P1(4),P2(4),
    1,CO(4),TFI(4),NEP(250),AN(250),XE(3,2),IPLAS(250),CFI(4),SNU(
    2,ST(28,56),ST1(28,28),TED(375),FPLA(125),DPLA(125),AUM(2)
    3,UD(300,1),F(300,1),U(300,2),TEN(375,1)
    4,DENS(4),EARTH(4)

```

```

    COMMON X,DELT,BV,E1,E2,P1,P2,GE,CO,TFI,AN,UD,U,XE,CO1,GE1
    1,CFI,ST,ST1,TEN,TED,FPLA,DPLA,F,AUM,FPL1,SNU,ALAN,DENS,EARTH
    COMMON JI,JJ,NPOIN,NPART,KE1,NEM,NELEM,NBOUN,NYM,NCONC,NCOLN,
    1,NP,LMEN,NS,ND,IP,LIMP,NCAR1,ISCAR,NFAS,LIM1,IU
    2,IER,NOD,NEND,NFIRS,NLAST,NSTAR,NF,NB,NEP,IPLAS,NCAR,IFAS,ICA

```

C FORMACION NODOS, ELEMENTOS Y PARTICIONES

```

    DO 35 I=1,NPOIN

```

```

        X(I,1)=0.

```

```

35  X(I,2)=0.

```

```

        DO 38 I=1,KE1

```

```

            DO 38 J=1,3

```

```

38  NOD(I,J)=0

```

```

        WRITE(JJ,16)

```

```

        READ(JI,23)NH1,NH2,NL1,NL2,NPOL,NELL,IGRAD

```

```

        WRITE(JJ,23)NH1,NH2,NL1,NL2,NPOL,NELL,IGRAD

```

```

        READ (JI,25)B1,B2,B3,B4

```

```

        READ (JI,25)A1,A2,A3,A4,A5,A6,TA

```

```

        WRITE(JJ,25)B1,B2,B3,B4,A1,A2,A3,A4,A5,A6,TA

```

```

        WRITE(JJ,17)

```

C

```

    DELT=ABS(1.NB2)

```

```

    DA1=(A2-A1)N(NL1-1)

```

```

    DA2=(A4-A3)N(NL2-1)

```

```

    DA4=(A6-A5)N(NL1-1)

```

```

    DB1=(B2-B1)N(NH1-1)

```

```

    DB2=(B4-B3)N(NH2-1)

```

```

    K=0

```

```

    KE=0

```

```

    HL2=NH2*.5*(B3+B4)

```

```

    HL=HL2+NH1*.5*(B1+B2)

```

```

    NH3=NH1+NH2+1

```

```

    NL3=NL1+NL2+1

```

```

    DA5=0.

```

```

    DTA1=0.

```

```

    AX=HL*TA

```

```

    DO 100 L=1,NL3

```

```

        LA=L-1

```

```

        AL=LA

```

```

        IF (L-2) 49,41,42

```

```

41  DA3=A1

```

```

        DA5=A5

```

```

        GO TO 49

```

```

42  IF (L-NL1-2) 45,46,47

```

```

45  DA3=DA3+DA1

```

```

        DA5=DA5+DA4

```

PAGE 5

```

      GO TO 49
46  DA3=A3
      GO TO 49
47  DA3=DA3+DA2
49  AX=AX+DA3
      DTA1=DTA1+(DA3-DA5)RHL2
      BX=HL
      DB3=0.
      DO 100 J=1,NH3
      JB=J-1
      BJ=JB
      IF (LA-NL1) 70,70,60
60  NH=NH1+1
      IF (J-NH) 65,65,100
65  IF(J-2)76,66,67
66  DB3=BI
      GO TO 80
67  DB3=DB3+DB1
      IF(JB-NH1)80,59,59
59  NL=NL1+1
      GO TO 80
70  IF (IGRAD-1) 71,62,100
62  IF (L-NL1) 71,63,100
63  DO 68 I=1,NELL,2
      KE=1+KE
      K2=KE+1
      READ(JI,22)K3,(NOD(KE,K1),K1=1,3),(NOD(K2,K1),K1=1,3)
      IF(KE-K3)134,68,134
134 WRITE(JJ,20)
      CALL EXIT
20  FORMAT(9H DATO MAL,////)
68  KE=1+KE
      DO 69 I=1,NPOL
      K=1+K
      READ(JI,21)M,X(K,1),X(K,2)
      IF(K-M)34,69,34
34  WRITE(JJ,20)
      CALL EXIT
69  WRITE(JJ,21)K,X(K,1),X(K,2)
      READ (JI,23)NSTAR(L),NFIRS(L),NEND(L),NLAST(L),NSTAR(L+1),NFIR
11),NEND(L+1),NLAST(L+1),NSTAR(L+2),NFIRS(L+2)
      IGRAD=2
      GO TO 100
71  NH=NH3
      IF(J-NH1-2)65,73,74
73  DB3=83
      DTA=DTA1
      GO TO 80
74  DB3=DB3+DB2
      GO TO 80
76  DTA=0.
      IF(IGRAD-2)105,106,105
105 NFIRS(L)=K+1
      NSTAR(L)=KE+1
      GO TO 107
106 IGRAD=3

```

PAGE 6

```

107 NL=NL3
80 K=K+1
   BX=BX-DB3
   IF(J-NH)86,88,88
86 IF(L-NL)87,89,89
87 KE=KE+1
   NOD(KE,1)=K
   NOD(KE,2)=K+NH+1
   NOD(KE,3)=K+NH
   KE=KE+1
   NOD(KE,1)=K
   NOD(KE,2)=K+1
   NOD(KE,3)=K+NH+1
   GO TO 89
88 NLAST(L)=K
   NEND(L)=KE
89 X(K,1)=AX-TA*(HL-BX)-DTA*(HL2-BX)
   X(K,2)=BX
   WRITE(JJ,21)K,X(K,1),X(K,2)
100 CONTINUE
   WRITE(JJ,18)
   DO 101 I=1,KE1,4
   I1=I+1
   I2=I+2
   I3=I+3
101 WRITE(JJ,22)I,(NOD(I,J),J=1,3),(NOD(I1,J),J=1,3),(NOD(I2,J),J=
1,(NOD(I3,J),J=1,3)
   WRITE(JJ,19)
   DO 102 I=1,NPART
102 WRITE(JJ,23)I,NFIRS(I),NLAST(I),NSTAR(I),NEND(I)
   DO 43 I=1,NPOIN
   DO 43 J=1,2
43 X(I,J)=DELT*X(I,J)
16 FORMAT(R12H DATOS TALUDR)
17 FORMAT(R2X,15HNODO COORDEN X,8X,1HYR)
18 FORMAT(R16H ELEMENTO NODOSN)
19 FORMAT(R26H PARTE NODOS ELEMENTOSN)
21 FORMAT(I5,4F14.6)
22 FORMAT(I5,4(3I4,4X))
23 FORMAT(12I5)
25 FORMAT(11F8.3)
   RETURN
   END

```

VARIABLE ALLOCATIONS

X(RC)=7FFE-7DAB	DELT(RC)=7DA6	BV(RC)=7DA4-7C96	E1(R
P2(RC)=7C7C-7C76	GE(RC)=7C74-7C6E	CO(RC)=7C6C-7C66	TFI(R
U(RC)=7810-7362	XE(RC)=7360-7356	CO1(RC)=7354	GE1(R
ST1(RC)=6708-60EA	TEN(RC)=60E8-5DFC	TED(RC)=5DFA-580E	FPLA(R
AUM(RC)=56C0-56BE	FPL1(RC)=56BC	SNU(RC)=56BA-5684	ALAN(R
J1(IC)=56A1	JJ(IC)=56A0	NPOIN(IC)=569F	NPART(I
NELEM(IC)=569B	NEOUN(IC)=569A	NYM(IC)=5699	NCONCI
NP(IC)=5695	LMEN(IC)=5694	NS(IC)=5693	ND(I
NCAR1(IC)=568F	ISCAR(IC)=568E	NFAS(IC)=568D	LIM1(I
NOD(IC)=5689-539C	NEND(IC)=539B-538A	NFIRS(IC)=5389-5378	NLAST(I
NB(IC)=5331-52EE	NEP(IC)=52ED-51F4	1PLAS(IC)=51F3-50FA	NCAR1
B1(R)=0000	B2(R)=0002	B3(R)=0004	B4(R

PAGE 7

NN FOR

*LIST ALL

*ONE WORD INTEGERS

SUBROUTINE CAREX

```

  DIMENSION X(150,2),NOD(250,3),NSTAR(18),NLAST(18),NFIRS(18),NEND(1
  18)

```

```

  DIMENSION NF(34),NB(34,2),BV(34,2,2),E1(4),E2(4),P1(4),P2(4),GE(4)
  1,CO(4),TFI(4),NEP(250),AN(250),XE(3,2),IPLAS(250),CFI(4),SNU(4)
  2,ST(28,56),ST1(28,28),TED(375),FPLA(125),DPLA(125),AUM(2)
  3,UD(300,1),F(300,1),U(300,2),TEN(375,1)
  4,DENS(4),EARTH(4)

```

```

  COMMON X,DELT,BV,E1,E2,P1,P2,GE,CO,TFI,AN,UD,U,XE,CO1,GE1

```

```

  1,CFI,ST,ST1,TEN,TED,FPLA,DPLA,F,AUM,FPL1,SNU,ALAN,DENS,EARTH

```

```

  COMMON JI,JJ,NPOIN,NPART,KE1,NEM,NELEM,NBOUN,NYM,NCONC,NCOLN,IELAS
  1,NP,LMEN,NS,ND,IP,LIMP,NCAR1,ISCAR,NFAS,LIM1,IU

```

```

  2,IER,NOD,NEND,NFIRS,NLAST,NSTAR,NF,NB,NEP,IPLAS,NCAR,IFAS,ICAR

```

C

C

PROPIEDADES REOLOGICAS

IDAT=0

WRITE(JJ,38)

38 FORMAT(N,' TIPO ZON DESPL CARG NUM')

WRITE(JJ,39)

39 FORMAT(' SUEL HET PRESC SUC FASES',N)

READ (JI,23)NYM,NYMI,NBOUN,ISCAR,NFAS

WRITE(JJ,23)NYM,NYMI,NBOUN,ISCAR,NFAS

WRITE(JJ,13)

13 FORMAT(N17H PROP. REOLOGICAS)

WRITE(JJ,14)

14 FORMAT(N' MODULO ELASTICIDAD G COEF POISSON COHES ANG

1 FUERZA MASICA DILATANC')

WRITE(JJ,201)

201 FORMAT(7X,'X',9X,'Y',16X,'X',6X,'Y',12X,'ROZ',5X,'Y',6X,'X',N)

DO 31 I=1,NYM

READ (JI,26)E1(I),E2(I),GE(I),P1(I),P2(I),CO(I),TFI(I)

1,DENS(I),EARTH(I),SNU(I)

31 WRITE(JJ,26)E1(I),E2(I),GE(I),P1(I),P2(I),CO(I),TFI(I)

1,DENS(I),EARTH(I),SNU(I)

GE1=1.NGE(1)

CO1=GE1*DELT

DO 29 I=1,NYM

TFI(I)=TFI(I)*0.017453

CFI(I)=COS(TFI(I))

TFI(I)=SIN(TFI(I))

SNU(I)=SNU(I)*0.017453

SNU(I)=SIN(SNU(I))

E1(I)=E1(I)*GE1

E2(I)=E2(I)*GE1

CO(I)=CO(I)*GE1

29 GE(I)=GE(I)*GE1

IF(NYM-1)32,32,33

33 CONTINUE

WRITE(JJ,7)

7 FORMAT(N13H NO HOMOGENEON)

WRITE(JJ,8)

8 FORMAT(4X,'ELEMEN TIPO ANGULO',N)

DO 34 I=1,NYMI

PAGE 8

```

      READ (JI,24)NPRI,NULT,NEPI,AX
      WRITE(JJ,24)NPRI,NULT,NEPI,AX
      DO 34 J=NPRI,NULT
      NEP(J)=NEPI
34  AN(J)=AX
      GO TO 44
32  DO 9 I=1,NELEM
      AN(I)=0.
      9 NEP(I)=1
44  CONTINUE
      NPUN2=NPOIN*2
C    CALCULO CARGAS
      DO 300 L=1,NCAR
      WRITE(JJ,501)L
501  FORMAT(N,20H HIPOTESIS CARGA NO.,I2,N)
      WRITE(JJ,11)
11  FORMAT(N,' CONTORNO      (0=DESPL. PRESCRITO , 1=DESPL. NO PRE',
1    'SCRITO )',N)
      WRITE(JJ,200)
200  FORMAT(N,21X,'DESPLAZAMIENTOS')
      WRITE(JJ,12)
12  FORMAT(' NODO      X      Y      X',12X,'Y',N)
      DO 30 I=1,NBOUN
      READ (JI,24)NF(I),NB(I,1),NB(I,2),BV(I,1,L),BV(I,2,L)
      WRITE(JJ,24)NF(I),NB(I,1),NB(I,2),BV(I,1,L),BV(I,2,L)
      BV(I,1,L)=BV(I,1,L)*DELT
30  BV(I,2,L)=BV(I,2,L)*DELT
C
      WRITE(JJ,10)
10  FORMAT(N,' FUERZAS      0=NO HAY      1=SI HAY',N)
      WRITE(JJ,210)
210  FORMAT(' F. CONC MASA Y. X AUM',N)
      READ (JI,23)NCOLN,NCONC,IDENS,IEART,IAUM
      WRITE(JJ,23)NCOLN,NCONC,IDENS,IEART,IAUM
      AUM(L)=IAUM*100.
      DO 99 I=1,NPUN2
89  U(I,L)=0.
      IF (NCONC) 107,106,107
107  DO 98 I=1,NCONC
      READ(JI,21) K,U(2*K-1,L),U(2*K,L)
      98 WRITE(JJ,21) K,U(2*K-1,L),U(2*K,L)
106  IF(NCOLN)108,109,108
108  DO 91 I=1,NPOIN,2
      I2=2*I
      READ (JI,21)J,UT,VT,VOL,AX
      IF(J-I)82,83,82
82  WRITE(JJ,20)
20  FORMAT(9H DATO MAL,NNNN)
      CALL EXIT
83  CONTINUE
      WRITE(JJ,21)I,UT,VT,VOL,AX
      U(I2-1,L)=U(I2-1,L)+UT
      U(I2+1,L)=U(I2+1,L)+VOL
      U(I2+2,L)=U(I2+2,L)+AX
91  U(I2,L)=U(I2,L)+VT
109  IF(IDENS)110,112,110

```

```
112 IF(IEART)110,111,110
110 DO 93 I=1,NELEM
    J=NEP(I)
    DO 94 I=1,3
        J1=NOD(I,I)
        XE(I,1)=X(J1,1)
94  XE(I,2)=X(J1,2)
    VOL=XE(2,1)*(XE(3,2)-XE(1,2))+XE(1,1)*(XE(2,2)-XE(3,2))
    VOL= .166667*(VOL+XE(3,1)*(XE(1,2)-XE(2,2)))
    IF(VOL)194,194,196
194 IDAT=II
27  FORMAT(' DATO MAL ELEMENTO',I5,NNNN)
    WRITE(JJ,27)IDAT
196 CONTINUE
    VOL=VOL*(DELT*DELT)
    UT=VOL*EARTH(J)
    VT=VOL*DENS(J)
    DO 93 I=1,3
        J2=2*NOD(I,I)
        U(J2-1,L)=U(J2-1,L)+UT
93  U(J2,L)=U(J2,L)+VT
111 WRITE(JJ,15)
15  FORMAT(N7H CARGAS)
    WRITE(JJ,122)
122 FORMAT(2(' NODO      CARGA X',7X,'CARGA Y      '),N)
    DO 55 I=1,NPOIN,2
        I1=I+1
        I2=2*I
55  WRITE(JJ,121)I,U(I2-1,L),U(I2,L),I1,U(I2+1,L),U(I2+2,L)
121 FORMAT(2(I5,2F14.6,4X))
    DO 54 I=1,NPUN2
54  U(I,L)=U(I,L)*CO1
300 CONTINUE
    WRITE(JJ,22)DELT,GE1
    WRITE(JJ,1000)
1000 FORMAT(1H1)
    IP=0
    IU=0
    LMEN=1
    DO 123 I=1,NELEM
123  IPLAS(I)=0
        IF(ISCAR)400,400,401
400  IF(NFAS)402,402,401
401  NCAR1=NCAR
        NCAR=1
        LIM1=LIMP
        LIMP=1
402  ICAR=1
        IF(IDAT)116,116,117
117  CALL EXIT
116 CONTINUE
21  FORMAT(I5,4F14.6)
22  FORMAT(N14H ESCALA LONG=,F10.5,7H TENS=,F10.5)
23  FORMAT(14I5)
24  FORMAT(3I5,2F12.6)
26  FORMAT(3F10.1,7F7.3)
```


RETURN
END

VARIABLE ALLOCATIONS

X(RC)=7FFE-7DA8	DELT(RC)=7DA6	BV(RC)=7DA4-7C96	E1(RC)=7
P2(RC)=7C7C-7C76	GE(RC)=7C74-7C6E	CO(RC)=7C6C-7C66	TFI(RC)=7
U(RC)=7810-7362	XE(RC)=7360-7356	CO1(RC)=7354	GE1(RC)=7
ST1(RC)=6708-60EA	TEN(RC)=60E8-5DFC	TED(RC)=5DFA-580E	FPLA(RC)=5
AUM(RC)=56C0-56BE	FPL1(RC)=56BC	SNU(RC)=56BA-56B4	ALAN(RC)=5
J1(IC)=56A1	JJ(IC)=56A0	NPOIN(IC)=569F	NPART(IC)=5
NELEM(IC)=569B	NBOUN(IC)=569A	NYM(IC)=5699	NCONC(IC)=5
NP(IC)=5695	LMEN(IC)=5694	NS(IC)=5693	ND(IC)=5
NCAR1(IC)=568F	ISCAR(IC)=568E	NFAS(IC)=568D	LIM1(IC)=5
NOD(IC)=5689-539C	NEND(IC)=539B-538A	NFIRS(IC)=5389-5378	NLAST(IC)=5
NB(IC)=5331-52EE	NEP(IC)=52ED-51F4	IPLAS(IC)=51F3-50FA	NCAR(IC)=5
AX(R)=0000	UT(R)=0002	VT(R)=0004	VOL(R)=0
I(I)=000C	NPRI(I)=000D	NULT(I)=000E	NEPI(I)=0
L(I)=0012	IDENS(I)=0013	IEART(I)=0014	IAUM(I)=0
II(I)=0018	J1(I)=0019	J2(I)=001A	I1(I)=0

STATEMENT ALLOCATIONS

38	=0030	39	=0040	13	=0050	14	=005C	201	=0089	7	=00A1
12	=00F8	10	=010A	210	=011D	20	=012C	27	=0137	15	=0148
22	=0175	23	=0186	24	=0189	26	=018E	31	=01E7	29	=027A
44	=02FD	30	=0361	99	=03A5	107	=03BD	98	=03D8	106	=03EF
109	=0462	112	=0466	110	=046A	94	=0496	194	=04E4	196	=04EE
300	=05B0	123	=05D5	400	=05EB	401	=05EF	402	=05FF	117	=0607

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CALLED SUBPROGRAMS

FCOS	FSIN	FSUBX	FMPY	FMPYX	FDIV	FDIVX	FLD	FLDX
SCOMP	SIOFX	SIOIX	SIOF	SIOI	SUBSC			

REAL CONSTANTS

.100000E 01=0022	.174530E-01=0024	.000000E 00=0026	.100000E 04
------------------	------------------	------------------	-------------

INTEGER CONSTANTS

0=002C	1=002D	2=002E	3=002F
--------	--------	--------	--------

CORE REQUIREMENTS FOR CAREX

COMMON	12042	VARIABLES	34	PROGRAM	1512
--------	-------	-----------	----	---------	------

END OF COMPILATION

NN DUP

*DELETE	CAREX		
CART ID OEC1	DB ADDR 2838	DB CNT	0064

*STORE	WS UA CAREX		
CART ID OEC1	DB ADDR 2848	DB CNT	0067

NN EJECT

NN JOB

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	0EC1	0EC1	0000
		0EA4	0002

V2 M06 ACTUAL 32K CONFIG 32K

NN FOR

*LIST ALL

*ONE WORD INTEGERS

SUBROUTINE MATEF

```

DIMENSION X(150,2),NOD(250,3),NSTAR(18),NLAST(18),NFIRS(18),NEND(18)

```

```

DIMENSION NF(34),NB(34,2),BV(34,2,2),E1(4),E2(4),P1(4),P2(4),GE(4)

```

```

1,CO(4),TFI(4),NEP(250),AN(250),XE(3,2),IPLAS(250),CFI(4),SNU(4)

```

```

2,ST(28,56),ST1(28,28),TED(375),FPLA(125),DPLA(125),AUM(2)

```

```

3,UD(300,1),F(300,1),U(300,2),TEN(375,1)

```

```

4,DENS(4),EARTH(4)

```

```

DIMENSION B(3,6),C(6,6),DB(3,6),ZX(3),ZY(3),D(3,3)

```

```

1,D1(3,3),C1(6,6),DB1(3,6),NO(28),ST2(28,28)

```

```

COMMON X,DELT,BV,E1,E2,P1,P2,GE,CO,TFI,AN,UD,U,XE,CO1,GE1

```

```

1,CFI,ST,ST1,TEN,TED,FPLA,DPLA,F,AUM,FPL1,SNU,ALAN,DENS,EARTH

```

```

COMMON JJ,NPOIN,NPART,KE1,NEM,NELEM,NBOUN,NYM,NCONC,NCOLN,IELAS

```

```

1,NP,LMEN,NS,ND,IP,LIMP,NCAR1,ISCAR,NFAS,LIM1,IU

```

```

2,IER,NOD,NEND,NFIRS,NLAST,NSTAR,NF,NB,NEP,IPLAS,NCAR,IFAS,ICAR

```

```

EQUIVALENCE (C1(1,1),AN(11)),(C(1,1),AN(47)),(DB1(1,1),AN(83))

```

```

1,(DB(1,1),AN(101)),(B(1,1),AN(119)),(NO(1),AN(137))

```

C

C

FORMACION DE MATRICES

```

NE1=2*NEM

```

```

DO 121 I=1,NEM

```

```

DO 121 J=1,NEM

```

```

121 ST1(I,J)=0.

```

```

NUEP=0

```

```

IDES=0

```

```

DO 200 II=LMEN,NPART

```

```

NST=NSTAR(II)

```

```

NEN=NEND(II)

```

```

K1=NFIRS(II)

```

```

L=NLAST(II)

```

```

M=2*(L-K1+1)

```

```

IF (II-NPART) 400,401,400

```

```

400 NA=2*(NLAST(II+1)-K1+1)

```

```

GO TO 402

```

```

401 NA=M

```

```

402 N=NA-M

```

```

MM=M+1

```

```

MN=M+N

```

```

DO 124 I=1,NEM

```

```

NO(I)=0

```

```

DO 129 J=1,NEM

```

```

129 ST2(I,J)=0.

```

```

DO 124 J=1,NEL

```

```

124 ST(I,J)=0.

```

```

DO 122 I=1,M

```

```

      DO 122 J=1,M
      ST(I,J)=ST1(I,J)
122  ST1(I,J)=0.
      IF(NEN-NST)158,128,128
128  CONTINUE
      DO 150 LK=NST,NEN
      IF(IP)125,125,151
151  LK1=0.5*(LK+1)
      IF(IPLAS(LK)-1)150,105,103
103  IF(IPLAS(LK)-4)105,104,104
104  IDES=1
      GO TO 125
105  IF(FPLA(LK1)-0.9999)106,125,125
106  IF(IU-1)2002,2002,150
2002  NUEP=1
125  DO 126 I=1,3
      J1=NOD(LK,I)
      XE(I,1)=X(J1,1)
126  XE(I,2)=X(J1,2)
      DO 130 J=1,6
      DO 130 I=1,6
      C(I,J)=0.
      IF(I-3)131,131,130
131  DB(I,J)=0.
      B(I,J)=0.
      IF(J-3)132,132,130
132  D(I,J)=0.
130  CONTINUE
      ORX=(XE(1,1)+XE(2,1)+XE(3,1))*0.333333
      ORY=(XE(1,2)+XE(2,2)+XE(3,2))*0.333333
      DO 135 I=1,3
      XE(I,1)=XE(I,1)-ORX
135  XE(I,2)=XE(I,2)-ORY
C
C      CALCULO DE RIGIDECES ELEMENTOS
      ZX(1)=XE(2,2)-XE(3,2)
      ZX(2)=XE(3,2)-XE(1,2)
      ZX(3)=XE(1,2)-XE(2,2)
      ZY(1)=XE(3,1)-XE(2,1)
      ZY(2)=XE(1,1)-XE(3,1)
      ZY(3)=XE(2,1)-XE(1,1)
      ZK=XE(2,1)*XE(3,2)-XE(3,1)*XE(2,2)
      Z=3.*ZK
      DO 139 I=1,3
      I2=2*I
      B(1,I2-1)=ZX(I)/Z
      B(2,I2)=ZY(I)/Z
      B(3,I2-1)=B(2,I2)
139  B(3,I2)=B(1,I2-1)
      Z=Z*0.5
      IF(IP)211,211,212
211  CONTINUE
C
      J=NEP(LK)
      YM1=E1(J)
      YM2=E2(J)

```

```

    PR1=P1(J)
    PR2=P2(J)
    G=GE(J)
    IF(NP) 147,148,147
C
C   DEFORMACION PLANA
148 EE=YM1*YM2
    YM1=YM1*(1.-PR1*PR1)
    YM2=YM2*(1.-EE*PR2*PR2)
    PR2=(PR2+PR1*PR2)*(1.-EE*PR2*PR2)
C
C   TENSION PLANA
147 EE=YM1*YM2
    DEN=YM1*(1.-EE*PR2*PR2)
    D(1,1)=DEN
    D(2,1)=PR2*DEN
    D(1,2)=D(2,1)
    D(2,2)=DEN*EE
    D(3,3)=G
C
    GO TO 161
212 IF(NUEP)219,219,211
219 IF(IDES)216,216,211
216 LK2=3*LK1
    IF(IU-1)1206,1206,1217
1206 IF(NUEP)1216,1216,1208
1208 ORE=(1.-FPLA(LK1))*(ABS(DPLA(LK1)))
    IF(ORE-1.)1209,1209,297
297 ORE=1.
1209 PR1=(TEN(LK2-2,1)-TEN(LK2-1,1))*0.5+.5*ORE*(TED(LK2-2)-TED(LK2-1))
    G=TEN(LK2,1)+TED(LK2)*ORE
    GO TO 1218
1216 PR1=(TEN(LK2-2,1)-TEN(LK2-1,1))*0.5+.25*(TED(LK2-2)-TED(LK2-1))
    G=TEN(LK2,1)+.5*TED(LK2)
    GO TO 1218
1217 PR1=(TEN(LK2-2,1)-TEN(LK2-1,1))*0.5
    G=TEN(LK2,1)
1218 CONTINUE
    PR2=PR1*PR1
    FA2=PR2+G*G
    FA=SQRT(FA2)
    I2=NEP(LK)
    ORX=1.*(1.-2.*P1(I2)+TF1(I2)*SNU(I2))
    ORY=(TF1(I2)*ORX)*NFA
    ORZ=(SNU(I2)*ORX)*NFA
    ZK=((1.-2.*P1(I2))*ORX)*NFA2
    PR2=PR2*ZK
    D1(1,1)=1.+ORX-PR2-PR1*(ORY+ORZ)
    D1(2,2)=1.+ORX-PR2+PR1*(ORY+ORZ)
    D1(3,3)=1.-G*G*ZK
    D1(1,2)=-1.+ORX+PR2-PR1*(ORY-ORZ)
    D1(2,1)=-1.+ORX+PR2+PR1*(ORY-ORZ)
    D1(1,3)=G*(-ORZ-ZK*PR1)
    D1(3,1)=G*(-ORY-ZK*PR1)
    D1(2,3)=G*(-ORZ+ZK*PR1)
    D1(3,2)=G*(-ORY+ZK*PR1)

```

```

      IF(NUEP)293,293,291
291  NUEP=0
      IF(ORE-.3333)1295,1295,1296
1295  ORE=2.*ORE
      GO TO 294
1296  ORE=(1.+ORE)*.5
      GO TO 294
293  ORE=0.
294  ORX=1.-ORE
      DO 292 I=1,3
      DO 292 J=1,3
292  D(I,J)=D1(I,J)*ORX+D(I,J)*ORE
      WRITE(JJ,28)((D(I,J),I=1,3),J=1,3)
      ND=LK
      READ(9'ND)((DB1(I,J),I=1,3),J=1,6)
      DO 241 J=1,6
      DO 241 I=1,6
      C1(I,J)=0.
      DO 241 K=1,3
241  C1(I,J)=C1(I,J)+DB1(K,J)*B(K,I)*Z
161  IF(NUEP)169,169,216
169  IF(IDES)166,166,168
168  ORE=1.
      IDES=0
      GO TO 294
166  CONTINUE
      DO 164 J=1,6
      DO 164 I=1,3
      DO 164 K=1,3
164  DB(I,J)=DB(I,J)+D(I,K)*B(K,J)
      ND=LK
      WRITE(9'ND)((DB(I,J),I=1,3),J=1,6)

```

C

C

```

      MATRIZ ELASTIC DEFORMACION PLANA
      DO 199 J=1,6
      DO 199 I=1,6
      DO 170 K=1,3
170  C(I,J)=C(I,J)+Z*B(K,I)*DB(K,J)
      IF(IP)199,199,198
198  C(I,J)=C(I,J)-C1(I,J)
199  CONTINUE
      DO 180 KK=1,3
      I=2*(KK-1)
      KL=NOD(LK,KK)-L
      IF(KL)175,175,172
175  MJ=2*(NOD(LK,KK)-K1)
      GO TO 181
172  MJ=2*(KL-1)
181  IF(IP)182,182,183
183  NS=1+8*(NOD(LK,KK)-1)
      IK=NOD(LK,KK)-K1+1
      IF(NO(IK))191,191,182
191  DO 186 MI=1,2
      MMI=MJ+MI
      IF(KL)185,185,184
184  READ(8'NS)(ST1(MMI,J),J=1,N)

```

```

      NS=NS+1
      READ(8*NS)(ST2(MMI,J),J=1,M)
      NS=NS+1
      GO TO 186
185  READ(8*NS)(ST(MMI,J),J=1,M)
      READ(8*NS)(ST(MMI,J),J=MM,NA)
      NS=NS+2
186  NO(IK)=1
182  DO 180 LL=1,3
      J=2*(LL-1)
      IF(KL)189,189,187
187  IK=NOD(LK,LL)-L
      IF(IK)189,189,173
173  NI=2*(IK-1)
      GO TO 176
189  NI=2*(NOD(LK,LL)-K1)
176  DO 177 NJ=1,2
      DO 177 MI=1,2
      MMI=MJ+MI
      NNJ=NJ+NI
      IMI=I+MI
      JNJ=J+NJ
      IF(KL)178,178,174
174  IF(IK)273,273,274
274  ST1(MMI,NNJ)=ST1(MMI,NNJ)+C(IMI,JNJ)
      GO TO 177
273  ST2(MMI,NNJ)=ST2(MMI,NNJ)+C(IMI,JNJ)
      GO TO 177
178  ST(MMI,NNJ)=ST(MMI,NNJ)+C(IMI,JNJ)
177  CONTINUE
180  CONTINUE
150  CONTINUE
      DO 406 I=1,NEM
406  NO(I)=0
158  CONTINUE

```

C

C

```

      DESPLAZAMIENTOS PRESCRITOS
      DO 403 I=1,NBOUN
      MA1=NF(I)-K1
      NA1=NF(I)-L
      IF (MA1) 403,407,407
407  IF (II-NPART) 404,408,404
404  MMA1=NF(I)-NLAST(II+1)
      IF(MMA1)408,408,403
408  DO 403 J=1,2
      IF (NB(I,J)) 403,410,403
410  NMI=2*MA1+J
      DO 414 J1=1,MN
      I2=2*K1-2+J1
      IF (NA1) 411,411,396
411  ST(NMI,J1)=0.
      ST(NMI,NMI)=1.
      GO TO 414
396  MJ=J1-M
      NMK=NMI-M
      IF(MJ)399,399,397

```

```
399 ST2(NMK,J1)=0.
    GO TO 414
397 IF(IP)414,414,398
398 ST1(NMK,MJ)=0.
    ST1(NMK,NMK)=1.
414 CONTINUE
    J3=2*K1-2+NMI
    DO 62 I1=1,NCAR
    62 U(J3,I1)=BV(I,J,I1)
403 CONTINUE
C   ESCRITURA EN DISCO DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA PARTICION
    IF(IP)433,434,433
433 IF(NEN-NST)436,431,431
431 DO 437 J1=NST,NEN
    IF(IPLAS(J1)-1)437,439,1439
1439 IF(IPLAS(J1)-4)439,1440,1440
1440 IPLAS(J1)=IPLAS(J1)-13
439 DO 435 J=1,3
    NS=8*NOD(J1,J)-7
    KL=NOD(J1,J)-L
    IK=KL+(.5*M)
    IF(NO(IK))432,432,435
432 DO 535 MI=1,2
    IF(KL)452,452,451
451 MJ=MI+2*KL-2
    WRITE(8'NS')(ST1(MJ,K),K=1,N)
    NS=NS+1
    WRITE(8'NS')(ST2(MJ,K),K=1,M)
    NS=NS+1
    GO TO 438
452 MJ=MI+2*(NOD(J1,J)-K1)
    WRITE(8'NS')(ST(MJ,K),K=1,M)
    WRITE(8'NS')(ST(MJ,K),K=MM,NA)
    NS=NS+2
438 NO(IK)=1
535 CONTINUE
435 CONTINUE
437 CONTINUE
    GO TO 436
434 NS=8*K1-7
    DO 405 J1=1,M
    WRITE(8'NS')(ST(J1,J),J=1,M)
    WRITE(8'NS')(ST(J1,J),J=MM,NA)
405 NS=NS+2
    NS=8*L+3
    DO 1405 J1=1,N
    WRITE(8'NS')(ST2(J1,J),J=1,M)
1405 NS=NS+3
436 CONTINUE
200 CONTINUE
    IF(IU)2000,2000,2001
2001 IU=IU-1
2000 CONTINUE
    28 FORMAT((8E12.4))
    RETURN
    END
VARIABLE ALLOCATIONS
X(RC)=7FFE-7DA8 DELT(RC)=7DA6 BV(RC)=7DA4-7C96 E1(RC)=7C
```

PAGE 7

P2(RC)=7C7C-7C76	GE(RC)=7C74-7C6E	CO(RC)=7C6C-7C66	TFI(RC)=7C
U(RC)=7810-7362	XE(RC)=7360-7356	COL(RC)=7354	GE1(RC)=73
ST1(RC)=6708-60EA	TEN(RC)=60E8-5DFC	TED(RC)=5DFA-5B0E	FPLA(RC)=5B
AUM(RC)=56C0-56BE	FPL1(RC)=56BC	SNU(RC)=56BA-56B4	ALAN(RC)=56
J1(IC)=56A1	JJ(IC)=56A0	NPOIN(IC)=569F	NPART(IC)=56
NELEM(IC)=569B	NBOUN(IC)=569A	NYM(IC)=5699	NCONC(IC)=56
NP(IC)=5695	LMEN(IC)=5694	NS(IC)=5693	ND(IC)=56
NCAR1(IC)=568F	ISCAR(IC)=568E	NFAS(IC)=568D	LIM1(IC)=56
NOD(IC)=5689-539C	NEND(IC)=539B-538A	NFIRS(IC)=5389-5378	NLAST(IC)=53
NB(IC)=5331-52EE	NEP(IC)=52ED-51F4	IPLAS(IC)=51F3-50FA	NCAR(IC)=50
C1(RC)=7C48-7C02	C(RC)=7C00-7BBA	DB1(RC)=7BB8-7B96	DB(RC)=7B
ZX(R)=0004-0000	ZY(R)=000A-0006	D(R)=001C-000C	DI(R)=00
ORY(R)=0652	ZK(R)=0654	Z(R)=0656	YM1(R)=06
PR2(R)=065E	G(R)=0660	EE(R)=0662	DEN(R)=06
FA(R)=066A	ORZ(R)=066C	NE1(I)=0674	I(I)=06
IDES(I)=0678	II(I)=0679	NST(I)=067A	NEN(I)=06
M(I)=067E	NA(I)=067F	N(I)=0680	MM(I)=06
LK1(I)=0684	J1(I)=0685	I2(I)=0686	LK2(I)=06
KL(I)=068A	MJ(I)=068B	IK(I)=068C	MI(I)=06
NI(I)=0690	NJ(I)=0691	NNJ(I)=0692	IMI(I)=06
NA1(I)=0696	MMA1(I)=0697	NMI(I)=0698	NMK(I)=06

STATEMENT ALLOCATIONS

28	=06C4	121	=06D7	400	=072C	401	=073E	402	=0742	129	=0765	1
103	=07EA	104	=07F5	105	=07FB	106	=0807	2002	=080D	125	=0811	1
135	=08C5	139	=0976	211	=0996	148	=09C4	147	=09F4	212	=0A2C	2
297	=0A68	1209	=0A6C	1216	=0AA5	1217	=0AD8	1218	=0AF7	291	=0BF8	1
292	=0C27	241	=0CB2	161	=0CF2	169	=0CF6	168	=0CFA	166	=0D04	1
175	=0CEE	172	=0E00	181	=0E09	183	=0E0D	191	=0E32	184	=0E40	1
173	=0EE8	189	=0EF3	176	=0F03	174	=0F27	274	=0F2B	273	=0F47	1
406	=0FAE	158	=0FC0	407	=0FDB	404	=0FE1	408	=0FF9	410	=1008	4
398	=105D	414	=1073	62	=108B	403	=10AA	433	=10C0	431	=10C6	1
451	=1129	452	=1174	438	=11BE	535	=11C7	435	=11D0	437	=11D9	4
200	=1267	2001	=1274	2000	=127A							

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CALLED SUBPROGRAMS

FABS	FSQRT	FADDX	FSUB	FSUBX	FMPY	FMPYX	FDIV	FLD	F
FLOAT	SWRT	SCOMP	SIOFX	SUBSC	SNR	SDRED	SDWRT	SDCOM	S

REAL CONSTANTS

.000000E 00=06A8	.500000E 00=06AA	.999900E 00=06AC	.333333E 00=
.250000E 00=06B4	.200000E 01=06B6	.333300E 00=06B8	

INTEGER CONSTANTS

2=06BA	1=06BB	0=06BC	4=06BD	3=06BE	6=06BF
--------	--------	--------	--------	--------	--------

CORE REQUIREMENTS FOR MATEF

COMMON	12042	VARIABLES	1704	PROGRAM	3028
--------	-------	-----------	------	---------	------

END OF COMPILATION

NN DUP

PAGE 1

NN JOB OEC1

LOG DRIVE	CART SPEC	CART AVAIL	PHY DRIVE
0000	OEC1	OEC1	0001

V2 M06 ACTUAL 32K CONFIG 32K

NN FOR

*LIST ALL

*ONE WORD INTEGERS

SUBROUTINE SCLEF

```

DIMENSION X(150,2),NOD(250,3),NSTAR(18),NLA(18),NFIRS(18),NEND(18)

```

```

DIMENSION NF(34),NB(34,2),BV(34,2,2),E1(4),E2(4),P1(4),P2(4),GE(4)
1,CO(4),TFI(4),NEP(250),AN(250),XE(3,2),IPLAS(250),CFI(4),SNU(4)
2,ST(28,56),ST1(28,28),TED(375),FPLA(125),DPLA(125),AUM(2)
3,UD(300,1),F(300,1),U(300,2),TEN(375,1)
4,DENS(4),EARTH(4)

```

```

DIMENSION AM(28,28),BM(28,28),YM(28,28),TF(28,2),RS(28),DIS(28,2)
1,D11(28),B11(28),CT(29,29)

```

```

COMMON X,DELT,BV,E1,E2,P1,P2,GE,CO,TFI,AN,UD,U,XE,CO1,GE1
1,CFI,ST,ST1,TEN,TED,FPLA,DPLA,F,AUM,FPL1,SNU,ALAN,DENS,EARTH
COMMON JI,JJ,NPOIN,NPART,KE1,NEM,NELEM,NBOUN,NYM,NCONC,NCOLN,IELAS
1,NP,LMEN,NS,ND,IF,LIMP,NCAR1,ISCAR,NFAS,LIM1,IU
2,IER,NOD,NEND,NFIRS,NLA,NSTAR,NF,NB,NEP,IPLAS,NCAR,IFAS,ICAR
3,ICAF,INUEV

```

```

EQUIVALENCE (YM(1,1),ST(1,1)),(AM(1,1),ST1(1,1))
1,(BM(1,1),ST(1,29))

```

C

C

RESOLUCION SISTEMA

DO 406 J=1,NEM

DO 210 I1=1,NCAR

210 TF(J,I1)=0.

RS(J)=0.

DO 406 I=1,NEM

406 YM(J,I)=0.

IF(LMEN-1)461,461,462

461 LMIN=1

GO TO 463

462 LMIN=LMEN-1

463 CONTINUE

DO 407 LL=LMIN,NPART

K1=NFIRS(LL)

L=NLA(LL)

M=2*(NLA(LL)-K1+1)

MM=M+1

IF(LL-NPART)440,441,440

440 NA=2*(NLA(LL+1)-K1+1)

GO TO 442

441 NA=M

442 N=NA-M

NS=8*K1-7

DO 446 I=1,M

READ(8*NS)(AM(I,J),J=1,M)

READ(8*NS)(BM(I,J),J=1,N)

446 NS=NS+2

PAGE 2

```

      IF(LMEN-1)465,465,466
466 IF(LL-LMIN)467,467,465
465 CONTINUE
      DO 408 I=1,M
      K=2*K1-2+I
      DO 211 I1=1,NCAR
211 F(K,I1)=U(K,I1)-TF(I,I1)
      DO 408 J=1,M
408 AM(I,J)=AM(I,J)-YM(I,J)
      IER=0
      DO 443 I=1,M
      DO 443 J=1,M
443 CT(I,J)=AM(I,J)
      WRITE(JJ,2000)LL
      CALL TINVF(CT,M)
      IF(IER)501,448,501
448 CONTINUE
      DO 444 I=1,M
      DO 444 J=1,M
444 AM(I,J)=CT(I,J)
      NS=8*K1-4
      DO 445 I=1,M
      WRITE(8*NS)(AM(I,J),J=1,M)
445 NS=NS+3
      GO TO 471
467 NS=8*K1-4
      DO 469 I=1,M
      READ(8*NS)(AM(I,J),J=1,M)
469 NS=NS+3
471 CONTINUE
      NS=8*L+3
      DO 805 I=1,N
      READ(8*NS)(CT(I,J),J=1,M)
805 NS=NS+3
      DO 412 I1=1,NCAR
      DO 411 I=1,M
      DIS(I,I1)=0.
      DO 411 J=1,M
      K8=2*K1-2+J
411 DIS(I,I1)=DIS(I,I1)+AM(I,J)*F(K8,I1)
      DO 412 I=1,N
      TF(I,I1)=0.
      DO 412 J=1,M
412 TF(I,I1)=TF(I,I1)+CT(I,J)*DIS(J,I1)
      DO 413 J=1,N
      DO 413 I=1,M
      YM(I,J)=0.
      DO 413 K=1,M
413 YM(I,J)=YM(I,J)+AM(I,K)*PM(K,J)
      DO 414 I=1,N
      DO 414 J=1,N
      AM(I,J)=0.
      DO 414 K=1,M
414 AM(I,J)=AM(I,J)+CT(I,K)*YM(K,J)
      DO 415 I=1,N
      DO 415 J=1,N

```

PAGE 3

415 YM(I,J)=AM(I,J)

407 CONTINUE

C

C

VUELTA ATRAS Y RESIDUOS

NS=8*K1-7

DO 913 I=1,M

READ(8'NS')(AM(I,J),J=1,M)

913 NS=NS+3

DO 500 II=1,NPART

DO 811 J=1,M

811 RS(J)=0.

LL=NPART-II

DO 905 I1=1,NCAR

DO 914 I=1,M

D11(I)=0.

J=2*K1-2+I

914 UD(J,I1)=DIS(I,I1)

IF(I1-1)900,900,899

899 DO 901 I=1,M

DO 901 J=1,N

K2=2*NFIRS(LL+2)-2+J

901 D11(I)=D11(I)+BM(I,J)*UD(K2,I1)

900 DO 903 I=1,M

B11(I)=0.

DO 903 J=1,M

K2=2*NFIRS(LL+1)-2+J

903 B11(I)=B11(I)+AM(I,J)*UD(K2,I1)

DO 905 I=1,M

K2=2*NFIRS(LL+1)-2+I

905 RS(I)=U(K2,I1)-D11(I)-B11(I)+RS(I)

IF(I1-NPART)907,906,906

906 N=M

GO TO 500

907 N=M

M=2*(NLAST(LL)-NFIRS(LL)+1)

K1=NFIRS(LL)

L=NLAST(LL)

NS=8*K1-7

DO 908 I=1,M

READ(8'NS')(AM(I,J),J=1,M)

READ(8'NS')(BM(I,J),J=1,N)

NS=NS+1

908 READ(8'NS')(YM(I,J),J=1,M)

NS=8*L+3

DO 1905 I=1,N

READ(8'NS')(CT(I,J),J=1,M)

1905 NS=NS+3

DO 500 I1=1,NCAR

DO 909 I=1,M

K2=2*K1-2+I

TF(I,I1)=F(K2,I1)

DO 909 J=1,N

K2=2*NFIRS(LL+1)-2+J

909 TF(I,I1)=TF(I,I1)-BM(I,J)*UD(K2,I1)

DO 910 I=1,M

DIS(I,I1)=0.

PAGE 4

```

DO 910 J=1,M
910 DIS(I,I1)=DIS(I,I1)+YM(I,J)*TF(J,I1)
DO 911 I=1,N
DO 911 J=1,M
911 RS(I)=RS(I)-CT(I,J)*DIS(J,I1)
500 WRITE(JJ,28)(RS(I),I=1,N)
28 FORMAT((8E12.4))
2000 FORMAT(7I4)
501 CONTINUE
RETURN
END

```

VARIABLE ALLOCATIONS

X(RC)=7FFE-7DA8	DELT(RC)=7DA6	BV(RC)=7DA4-7C96	E1(RC)=7C
P2(RC)=7C7C-7C76	GE(RC)=7C74-7C6E	CO(RC)=7C6C-7C66	TF1(RC)=7C
U(RC)=7810-7362	XE(RC)=7360-7356	CO1(RC)=7354	GE1(RC)=73
ST1(RC)=6708-60EA	TEN(RC)=60E8-5DFC	TED(RC)=5DFA-5B0E	FPLA(RC)=5B
AUM(RC)=56C0-568E	FPL1(RC)=56BC	SNU(RC)=56BA-56B4	ALAN(RC)=56
J1(IC)=56A1	JJ(IC)=56A0	NPOIN(IC)=569F	NPART(IC)=56
NELEM(IC)=569B	NBOUN(IC)=569A	NYM(IC)=5699	NCONC(IC)=56
NP(IC)=5695	LMEN(IC)=5694	NS(IC)=5693	ND(IC)=56
NCAR1(IC)=568F	ISCAR(IC)=568E	NFAS(IC)=568D	LIM1(IC)=56
NOD(IC)=5689-539C	NEND(IC)=539B-538A	NFIRS(IC)=5389-5378	NLAST(IC)=53
NB(IC)=5331-52EE	NEP(IC)=52ED-51F4	IPLAS(IC)=51F3-50FA	NCAR(IC)=50
ICAF(IC)=50F6	INUEV(IC)=50F5	YM(RC)=7348-6D2A	AM(RC)=67
RS(R)=00A6-0070	DIS(R)=0116-00A8	D11(R)=014E-0118	B11(R)=01
I1(I)=081B	I(I)=081C	LMIN(I)=081D	LL(I)=08
M(I)=0821	MM(I)=0822	NA(I)=0823	N(I)=08
II(I)=0827	K2(I)=0828		

STATEMENT ALLOCATIONS

28	=0837	2000	=083A	210	=0846	406	=0867	461	=C88A	462	=0890
446	=091B	466	=0930	465	=0936	211	=0949	408	=C970	443	=099B
469	=0A59	471	=0A68	805	=0A8D	411	=0ABE	412	=CB06	413	=0B5B
811	=0C58	914	=0C8C	899	=0CAF	901	=0CC7	900	=CCFA	903	=CD1B
1905	=0E41	909	=0E8B	910	=0ED3	911	=0F10	500	=0F43	501	=0F6C

FEATURES SUPPORTED
ONE WORD INTEGERS

CALLED SUBPROGRAMS

TINV	FACDX	FSUBX	FMPYX	FLD	FLDX	FSTOX	FSBRX	SWRT
SDCOM	SDFX							

REAL CONSTANTS

.000000E 00=082E

INTEGER CONSTANTS

1=0830	2=0831	8=0832	7=0833	0=0834	4=0835
--------	--------	--------	--------	--------	--------

CORE REQUIREMENTS FOR SOLEF

COMMON 12044 VARIABLES 2094 PROGRAM 1856

END OF COMPILATION

RN DUP

PAGE 6

NN FOR

*LIST ALL

*ONE WORD INTEGERS

```

SUBROUTINE PLAEX
  DIMENSION X(150,2),NOD(250,3),NSTAR(18),NLAST(18),NFIRS(18),NEN
  18)
  DIMENSION NF(34),NB(34,2),BV(34,2,2),E1(4),E2(4),F1(4),P2(4),GE
  1,CO(4),TFI(4),NEP(250),AN(250),IPLAS(250),CFI(4),SNU(4),XE(3,2)
  2,ST(28,56),ST1(28,28),TED(375),FPLA(125),DPLA(125),AUM(2)
  3,UD(300,1),F(300,1),U(300,2),TEN(375,1)
  4,DENS(4),EARTH(4),UT(300)
  DIMENSION DH(3),A(3),DB1(3,6),DB2(3,6),CD(6,2,2),XI(3,2,2),AR(2
  1,B(3,6,2),ORX(2),JN(2),ORY(2),ZX(3,2),ZY(3,2),Z(2)
  COMMON X,DELT,BV,E1,E2,P1,P2,GE,CO,TFI,AN,UD,U,XE,CO1,GE1
  1,CFI,ST,ST1,TEN,TED,FPLA,DPLA,F,AUM,FPL1,SNU,ALAN,DENS,EARTH
  COMMON JI,JJ,NPOIN,NPART,KE1,NEM,NELEM,NBOUN,NYM,NCONC,NCOLN,IE
  1,NP,LMEN,NS,ND,IP,LIMP,NCAR1,ISCAR,NFAS,LIM1,IU
  2,IER,NOD,NEND,NFIRS,NLAST,NSTAR,NF,NB,NEP,IPLAS,NCAR,IFAS,ICAR
  NEL1=NELEM*0.5
  NPUN2=2*NPOIN
  ND=1
  IF(IP)5000,5000,5012
5000 WRITE(JJ,5004)
5004 FORMAT(1H1,'PUNTO  ABSCISA  ORDENADA',N)
  FPL1=0.
  IPL=0
  ALAN=1.
  MAX=0
5012 DO 620 LL=1,NEL1
  LL2=2*LL
  LL1=LL2-1
  READ(9*ND)((DB1(I,J),I=1,3),J=1,6)
  READ(9*ND)((DB2(I,J),I=1,3),J=1,6)
  DO 6021 I=1,3
  A(I)=0.
  JN(1)=NOD(LL1,I)
  JN(2)=NOD(LL2,I)
  I2=2*I
  I3=I2-1
  LLI=3*LL-3+I
  DO 6019 J3=1,2
  JN3=2*JN(J3)
  DO 51 I7=1,NCAR
  CD(I2,I7,J3)=UD(JN3,I7)
  51 CD(I3,I7,J3)=UD(JN3-1,I7)
  DO 6019 J9=1,2
  JN1=JN(J9)
6019 XI(I,J3,J9)=X(JN1,J3)
  IF(IP)1000,1000,6021
1000 FPLA(LL)=0.
  DO 1900 I7=1,NCAR
1900 TEN(LLI,I7)=0.
6021 CONTINUE
  IF(IP)8,8,9
  9 IF(IELAS)5054,5054,8
  8 DO 301 J3=1,2

```

PAGE 7

```

ZX(1,J3)=XI(2,2,J3)-XI(3,2,J3)
ZX(2,J3)=XI(3,2,J3)-XI(1,2,J3)
ZX(3,J3)=XI(1,2,J3)-XI(2,2,J3)
AR(J3)=XI(2,1,J3)*ZX(2,J3)+XI(1,1,J3)*ZX(1,J3)+XI(3,1,J3)*ZX(3,
AR(J3)=AR(J3)*.166667
ORX(J3)=(XI(1,1,J3)+XI(2,1,J3)+XI(3,1,J3))* .333333
301 ORY(J3)=(XI(1,2,J3)+XI(2,2,J3)+XI(3,2,J3))* .333333
IF(IP)5705,5705,5054
5705 OGX=(ORX(1)*AR(1)+ORX(2)*AR(2))/N(DELT*(AR(1)+AR(2)))
OGY=(ORY(1)*AR(1)+ORY(2)*AR(2))/N(DELT*(AR(2)+AR(1)))
WRITE(JJ,31)LL,OGX,OGY
GO TO 5054
C
DESCARGA
5710 DO 348 J3=1,2
DO 303 J4=1,3
XI(J4,1,J3)=XI(J4,1,J3)-CRX(J3)
XI(J4,2,J3)=XI(J4,2,J3)-CRY(J3)
DO 303 J5=1,6
303 B(J4,J5,J3)=0.
Z(J3)=3.*(XI(2,1,J3)*XI(3,2,J3)-XI(3,1,J3)*XI(2,2,J3))
ZY(1,J3)=XI(3,1,J3)-XI(2,1,J3)
ZY(2,J3)=XI(1,1,J3)-XI(3,1,J3)
ZY(3,J3)=XI(2,1,J3)-XI(1,1,J3)
DO 304 J5=1,3
J2=2*J5
B(1,J2-1,J3)=ZX(J5,J3)/NZ(J3)
B(2,J2,J3)=ZY(J5,J3)/NZ(J3)
B(3,J2-1,J3)=B(2,J2,J3)
304 B(3,J2,J3)=B(1,J2-1,J3)
DO 348 I=1,3
DH(I)=0.
C
DEFORMACIONES TOTALES
DO 347 K=1,6
347 DH(I)=DH(I)+B(I,K,J3)*CD(K,1,J3)
348 A(I)=A(I)+(AR(J3)*DH(I))/N(AR(1)+AR(2))
LLI=3*LL-3
J4=NEP(LLI)
WRITE(JJ,35)LL,A(1),A(2)
C
DEFORMACIONES PLASTICAS
A(1)=A(1)-((1.-P1(J4))*TED(LLI+1)-P1(J4)*TED(LLI+2))/N(2.*GE(J4))
A(2)=A(2)-((1.-P1(J4))*TED(LLI+2)-P1(J4)*TED(LLI+1))/N(2.*GE(J4))
WRITE(JJ,35)LL,A(1),A(2)
A(3)=A(3)-TED(LLI+3)/N(2.*GE(J4))
WP=0.
C
TRABAJO PLASTICO
DO 350 I=1,3
LLI=LLI+1
WP=WP-A(I)*TEN(LLI,1)
350 WRITE(JJ,35)LL,WP
IF(WP)360,362,362
360 IF(IPLAS(LLI))362,362,5360
5360 IPLAS(LLI)=IPLAS(LLI)+10
IPLAS(LL2)=IPLAS(LL2)+10
WRITE(JJ,33)LL
33 FORMAT(' DESCARGA',I5)
362 FPLA(LL)=FPLA(LL)-DPLA(LL)

```

PAGE 8

```

      DO 364 I=1,3
      LLI=3*LL+I-3
364  TEN(LLI,1)=TEN(LLI,1)-TED(LLI)
      GO TO 620
5054  DO 1020 I7=1,NCAR
      DO 1020 I=1,3
      DH(I)=0.
      LLI=3*LL-3+I
      DO 622 K=1,6
622  DH(I)=DH(I)+(AR(1)*DB1(I,K)*CD(K,I7,1)+AR(2)*DB2(I,K)*CD(K,I7,
      DH(I)=DH(I)/(AR(1)+AR(2))
      TED(LLI)=DH(I)
      TEN(LLI,I7)=TEN(LLI,I7)+TED(LLI)
1020  DH(I)=TEN(LLI,I7)
      IF(IELAS)620,620,1003
1003  J=NEP(LL2)
      DPLA(LL)=FPLA(LL)
      FPL=0.5*(DH(1)-DH(2))
      FPL=FPL*FPL+DH(3)*DH(3)
      FPL=SQRT(FPL)
      FPLA(LL)=(FPL+(DH(1)+DH(2))*0.5*TFI(J))/(CO(J)*CFI(J))
      DPLA(LL)=FPLA(LL)-DPLA(LL)
      IF(ISCAR)1005,1005,101
1005  IF(NFAS)100,100,1015
1015  IF(IFAS)100,100,621
      101 IF(ICAR-1)8000,8000,102
8000  LIMP=1
      GO TO 100
      102 IF(ICAR-NCAR1)115,116,116
      116 LIMP=LIM1
      GO TO 621
      115 LIMP=1
      621 IF(FPL1-1.)103,10,10
      10 IF(IPL)105,105,103
      105 IF(IU)620,620,5620
5620  WRITE(JJ,35)LL,LL,IPLAS(LL1),FPLA(LL),DPLA(LL)
      IF(IPLAS(LL1))5710,5710,5048
5048  IF(FPLA(LL)-1.)5049,5710,5710
5049  IPLAS(LL1)=IPLAS(LL1)-3
      IPLAS(LL2)=IPLAS(LL2)-3
      GO TO 362
      103 ALA=(1.-FPLA(LL))/(DPLA(LL)+1.
      IF(LIMP)61,61,60
      61 IF(IPL)104,104,60
      60 IF(ALA-ALAN)104,104,1008
      104 IF(ALA)1008,1008,117
      117 ALAN=ALA
      FPL1=1.
      IPL=1
      WRITE(JJ,2)ALAN
      2 FORMAT(1H1,3X,'LANDA =',F7.3)
      GO TO 1053
      100 IF(IP)1004,1004,620
      1004 IF(FPLA(LL)-FPL1)1008,1008,1006
      1006 FPL1=FPLA(LL)
      1053 MAX=LL

```

PAGE 9

```

1008 IF(LL-NEL1)620,1032,1032
1032 IF(MAX)620,620,4000
4000 WRITE(JJ,5005)
5005 FORMAT(N,' PUNTO MAS CARGADO',N)
      WRITE(JJ,5006)
      LL2=2*MAX
      LL1=LL2-1
      WRITE(JJ,24)MAX,LL1,LL2,FPL1
      DO 1010 II=1,NPART
      N2=LL2-NEND(II)
      IF(N2)1011,1011,1010
1010 CONTINUE
1011 IF(IP)1012,1012,1017
1017 IF(II-LMEN)1012,620,620
1012 LMEN=II
      620 CONTINUE
      IF(IELAS)1002,1002,3040
3040 IF(ISCAR)2040,2040,106
      106 IF(ICAR-1)2040,2040,107
      107 IF(IPL)2040,2040,108
      108 ALUM=ALAN*AUM(1)
      DO 109 I=1,NEL1
      FPLA(I)=FPLA(I)-DPLA(I)*(1.-ALAN)
      DPLA(I)=DPLA(I)*ALUM
      DO 109 K=1,3
      LLJ=3*I-3+K
      TEN(LLJ,1)=TEN(LLJ,1)-TED(LLJ)*(1.-ALAN)
109 TED(LLJ)=TED(LLJ)*ALUM
      DO 110 I1=1,NPUN2
      U(I1,1)=U(I1,1)*ALUM
      UD(I1,1)=UD(I1,1)*ALAN
110 F(I1,1)=F(I1,1)*ALUM
      DO 1049 I=1,NBOUN
      BV(I,1,1)=BV(I,1,1)*ALUM
1049 BV(I,2,1)=BV(I,2,1)*ALUM
      IPLAS(LL1)=IPLAS(LL1)+3
      IPLAS(LL2)=IPLAS(LL2)+3
2040 IF(IP)1021,1021,1002
1021 IF(FPL1)3000,3000,3001
3000 WRITE(JJ,2004)
2004 FORMAT(N,2X,'NO PLASTIFICA NUNCA',N)
      GC TO 1002
3001 IF(FPL1-1.)1007,1007,1019
1007 WRITE(JJ,34)
      34 FORMAT(N,' NO PLASTIFICA',N)
      IF(LIMP)1019,1019,1002
1019 FPL2=1.*FPL1
      FPL3=AUM(1)*FPL2
      IPLAS(LL1)=IPLAS(LL1)+3
      IPLAS(LL2)=IPLAS(LL2)+3
      DO 1013 I=1,NEL1
      FPLA(I)=FPLA(I)*FPL2
      DPLA(I)=DPLA(I)*FPL3
      DO 1013 J=1,3
      LLJ=3*I-3+J
      TED(LLJ)=TED(LLJ)*FPL3

```


PAGE 10

```

1013 TEN(LLJ,1)=TEN(LLJ,1)*FPL2
      WRITE(JJ,2002)
2002 FORMAT(1H1,' NODO          CARGA X          CARGA Y(N)
      DO 1029 I1=1,NPUN2
      U(I1,1)=U(I1,1)*FPL3
      UD(I1,1)=UD(I1,1)*FPL2
1029 F(I1,1)=F(I1,1)*FPL3
      DO 1028 I=1,NPOIN
      I2=2*I
      U1=U(I2-1,1)*N(CO1*AUM(1))
      U2=U(I2,1)*N(CO1*AUM(1))
1028 WRITE(JJ,31)I,U1,U2
      DO 1039 I=1,NBQUN
      BV(I,1,1)=BV(I,1,1)*FPL3
1039 BV(I,2,1)=BV(I,2,1)*FPL3
1002 IF(IELAS)6011,6011,6012
6012 IH=0
      DO 6000 L1=1,NEL1
      LL1=2*L1-1
      LL2=LL1+1
      HH=1.-FPLA(L1)-DPLA(L1)
      IF(HH)6002,6002,6000

C
C   REDUCCION DEL RADIO DEL CIRCULO DE MOHR
6002 IF(FPLA(L1)-1.002)1916,1916,1914
1914 L5=NEP(LL2)
      L2=3*L1
      FPL=(TEN(L2-2,1)-TEN(L2-1,1))*0.5
      FPL=FPL*FPL+TEN(L2,1)*TEN(L2,1)
      FPL=SQRT(FPL)
      TENM=(TEN(L2-1,1)+TEN(L2-2,1))*0.5
      CORR=0.
      CORR=(FPL-CORR)/FPL
      TEN(L2,1)=TEN(L2,1)*CORR
      TEN(L2-1,1)=TENM+CORR*(TEN(L2-1,1)-TENM)
      TEN(L2-2,1)=TENM+CORR*(TEN(L2-2,1)-TENM)
      WRITE(JJ,31)L1,FPLA(L1)
      DPLA(L1)=DPLA(L1)-FPLA(L1)+1.0001
      FPLA(L1)=1.
1916 IF(IPLAS(LL1))6006,6006,6000
6006 IPLAS(LL1)=IPLAS(LL1)+3
      IPLAS(LL2)=IPLAS(LL2)+3
      IF(IH)7005,7005,7006
7005 WRITE(JJ,7007)
      WRITE(JJ,5006)
7007 FORMAT(1H1,' PUNTOS QUE VAN A PLASTIFICAR')
      IH=1
7006 WRITE(JJ,24)L1,LL1,LL2,FPLA(L1)
      DO 6003 NIH=1,LMEN
      NI2=2*L1-NEND(NIH)
      IF(NI2)6004,6004,6003
6004 IF(LMEN-NIH)6003,6003,6005
6005 LMEN=NIH
6003 CONTINUE
6000 CONTINUE
      IF(IU-1)6011,6020,6010

```

PAGE 11

```

6020 DO 6041 LL=1,NEL1
      IF(FPLA(LL)-1.)6041,6008,6008
6008 DO 6009 LL=1,NEL1
6009 WRITE(JJ,31)LL,FPLA(LL)
      GO TO 6010
6041 CONTINUE
      IU=IU-1
6011 DO 2051 I7=1,NCAR
      IF(ISCAR)7002,7002,1
7002 WRITE(JJ,2052)I7
2052 FORMAT(N,' HIPOTESIS CARGA',I5,N)
      1 WRITE(JJ,2000)
2000 FORMAT(1H1,' PUNTO      TENSION-X      TENSION-Y      TEN',
1S10N-XY      TENSION-1      TENSION-2      ANGULO 1-X      FUNC PLAST'
C
C      CALCULO TENSIONES PRINCIPALES

      DO 1022 LL=1,NEL1
      DO 1023 I=1,3
      LLI=3*LL-3+I
1023 DH(I)=TEN(LLI,I7)NGE1
      DHB=(DH(1)+DH(2))*0.5
      DHC=(DH(1)-DH(2))*0.5
      DHC=DHC*DHC+DH(3)*DH(3)
      DHC=SQRT(DHC)
      A(1)=DHB+DHC
      A(2)=DHB-DHC
      A(3)=2.*DH(3)N(DH(1)-DH(2))
      A(3)=(ATAN(A(3)))N2.
      A(3)=A(3)N.017453
1022 WRITE(JJ,31)LL,(DH(I),I=1,3),(A(I),I=1,3),FPLA(LL)
      WRITE(JJ,2001)
2001 FORMAT(1H1,' NODO      DESPLAZ-X      DESPLAZ-Y      DESPL PARC
1 DESPL PARC-Y',N)
      DO 1051 I=1,NPOIN
      I2=2*I
      I1=I2-1
      IF(IP)2041,2041,2042
2041 UT(I1)=0.
      UT(I2)=0.
2042 UD1=UD(I1,I7)NDELT
      UD2=UD(I2,I7)NDELT
      UT(I1)=UT(I1)+UD1
      UT(I2)=UT(I2)+UD2
1051 WRITE(JJ,35)I,UT(I1),UT(I2),UD1,UD2
2051 CONTINUE
6010 CONTINUE
      24 FORMAT(3I5,2F12.6)
      31 FORMAT(I5,7F14.4)
      35 FORMAT(I5,2F14.6,5X,2F14.6)
5006 FORMAT(N,' PUNTO ELEMENTOS  FUNC PLAST',N)
      RETURN
      END
VARIABLE ALLOCATIONS
X(RC)=7FFE-7DA8      DELT(RC)=7DA6      BV(RC)=7DA4-7C96      E1(RC)
P2(RC)=7C7C-7C76      GE(RC)=7C74-7C6E      CO(RC)=7C6C-7C66      TFI(RC)
U(RC)=7810-7362      XE(RC)=7360-7356      CO1(RC)=7354      GE1(RC)

```

Apéndice D

RESULTADOS DE ORDENADOR



APENDICE -D-

RESULTADOS DE ORDENADOR

Resultados de ordenador. Índice

=====

	<u>Pág.</u>
- Talud isorresistente. Datos	3
- Resultados en fase elástica, al comienzo de la rotura	8
- Resultados para una carga 99 % de la de rotura, en terreno con potencial plástico, $v = \emptyset$	17
- Resultados para una carga 99 % de la de rotura, en terreno con dilatación nula.	24

TALUD ISORRESISTENTE

12 PARTICIONES	HOMOGENEIDAD	(1)	ANCHO DE BANDA (24
164 ELEMENTOS	PROBLEMA PLANO	(- 0)	NUMERO PROBLEMA (- 1
103 NODOS	DENSIDAD TIPO	(0)	FORMA (1
22 DESPLAZAMIENTOS PRESCRITOS	ELASTOPLASTICIDAD(1)	AUMENTO CARGA (100
10 NODOS CARGADOS	CARGA LIMITE	(0)	

-DATOS TALUD

[illegible]

NODO	COORDEN X	Y
1	-0.000000	18.299999
2	-0.000000	14.299997
3	-0.000000	11.297996
4	-0.000000	9.814996
5	-0.000000	8.171997
6	-0.000000	6.368996
7	-0.000000	4.405997
8	-0.000000	2.282997
9	0.000000	-0.000001
10	3.660000	18.299999
11	3.660000	14.299997
12	3.660000	11.297996
13	3.539238	9.814996
14	3.405448	8.171997
15	3.258629	6.368996
16	3.098782	4.405997
17	2.925905	2.282997
18	2.740000	-0.000001
19	7.150000	18.299999
20	7.150000	14.299997
21	7.150000	11.297996
22	6.913727	9.814996
23	6.651964	8.171997
24	6.364709	6.368996
25	6.051964	4.405997
26	5.713727	2.282997
27	5.350000	-0.000001
28	10.470001	18.299999
29	10.470001	14.299997
30	10.470001	11.297996
31	10.123466	9.814996
32	9.739547	8.171997
33	9.318241	6.368996
34	8.859548	4.405997
35	8.363468	2.282997
36	7.829999	-0.000001
37	13.620000	18.299999

38	13.620000	14.299997
39	13.620000	11.297996
40	13.168457	9.814996
41	12.668197	8.171997
42	12.119222	6.368996
43	11.521532	4.405997
44	10.875124	2.282997
45	10.180000	-0.000001
46	16.600002	18.299999
47	16.600002	14.299997
48	16.600002	11.297996
49	16.048698	9.814996
50	15.437915	8.171997
51	14.767656	6.368996
52	14.037916	4.405997
53	13.248697	2.282997
54	12.399999	-0.000001
55	19.409999	18.299999
56	19.409999	14.299997
57	19.409999	11.297996
58	18.764186	9.814996
59	18.048702	8.171997
60	17.263538	6.368996
61	16.408699	4.405997
62	15.484186	2.282997
63	14.489995	-0.000001
64	22.049999	18.299999
65	22.049999	14.299997
66	22.049999	11.297996
67	21.314926	9.814996
68	20.500553	8.171997
69	19.606872	6.368996
70	18.633888	4.405997
71	17.581596	2.282997
72	16.449997	-0.000001
73	24.520000	18.300003
74	24.520000	14.300001
75	24.520000	11.298000
76	23.800003	9.815000
77	22.250003	8.172000
78	21.050003	6.369000
79	20.000003	4.406000
80	19.000003	2.283000
81	18.280002	0.000000
82	25.750003	12.800001
83	25.750003	11.300001
84	25.100002	10.600000
85	26.740001	18.300003
86	26.740001	14.300001
87	26.740001	12.800001
88	26.740001	11.300001
89	26.080001	10.600000
90	25.300003	9.780000
91	23.900001	8.172000
92	22.530002	6.369000
93	21.300003	4.406000
94	20.250003	2.283000
95	20.000003	0.000000

96	28.470001	12.800001
97	28.470001	11.300001
98	30.199993	18.299999
99	30.199993	14.299997
100	30.199993	11.297996
101	35.199997	18.299999
102	35.199997	14.299997
103	35.199997	11.297996

ELEMENTO NODOS

1	1	11	10	1	2	11	2	12	11	2	3	12
5	3	13	12	3	4	13	4	14	13	4	5	14
9	5	15	14	5	6	15	6	16	15	6	7	16
13	7	17	16	7	8	17	8	18	17	8	9	18
17	10	20	19	10	11	20	11	21	20	11	12	21
21	12	22	21	12	13	22	13	23	22	13	14	23
25	14	24	23	14	15	24	15	25	24	15	16	25
29	16	26	25	16	17	26	17	27	26	17	18	27
33	19	29	28	19	20	29	20	30	29	20	21	30
37	21	31	30	21	22	31	22	32	31	22	23	32
41	23	33	32	23	24	33	24	34	33	24	25	34
45	25	35	34	25	26	35	26	36	35	26	27	36
49	28	38	37	28	29	38	29	39	38	29	30	39
53	30	40	39	30	31	40	31	41	40	31	32	41
57	32	42	41	32	33	42	33	43	42	33	34	43
61	34	44	43	34	35	44	35	45	44	35	36	45
65	37	47	46	37	38	47	38	48	47	38	39	48
69	39	49	48	39	40	49	40	50	49	40	41	50
73	41	51	50	41	42	51	42	52	51	42	43	52
77	43	53	52	43	44	53	44	54	53	44	45	54
81	46	56	55	46	47	56	47	57	56	47	48	57
85	48	58	57	48	49	58	49	59	58	49	50	59
89	50	60	59	50	51	60	51	61	60	51	52	61
93	52	62	61	52	53	62	53	63	62	53	54	63
97	55	65	64	55	56	65	56	66	65	56	57	66
101	57	67	66	57	58	67	58	68	67	58	59	68
105	59	69	68	59	60	69	60	70	69	60	61	70
109	61	71	70	61	62	71	62	72	71	62	63	72
113	64	74	73	64	65	74	65	75	74	65	66	75
117	66	76	75	66	67	76	67	77	76	67	68	77
121	68	78	77	68	69	78	69	79	78	69	70	79
125	70	80	79	70	71	80	71	81	80	71	72	81
129	73	86	85	73	74	86	74	82	86	82	87	86
133	74	75	82	75	83	82	82	88	87	82	83	88
137	75	84	83	75	76	84	83	89	88	83	84	89
141	84	90	89	84	76	90	76	91	90	76	77	91
145	77	92	91	77	78	92	78	93	92	78	79	93
149	79	94	93	79	80	94	80	95	94	80	81	95
153	85	99	98	85	86	99	86	96	99	86	87	96
157	87	97	96	87	88	97	96	100	99	96	97	100
161	98	102	101	98	99	102	99	103	102	99	100	103

PARTE NODOS ELEMENTOS

1	1	9	1	16
2	10	18	17	32
3	19	27	33	48

4	28	36	49	64
5	37	45	65	80
6	46	54	81	96
7	55	63	97	112
8	64	72	113	128
9	73	84	129	152
10	85	95	153	158
11	96	100	159	164
12	101	103	165	164

CONTORNO (0=DESPL. PRESCRITO , 1=DESPL. NO PRESCRITO)

NODO	DESPLAZAMIENTOS			
	X	Y	X	Y
1	0	0	0.000000	0.000000
2	0	1	0.000000	0.000000
3	0	1	0.000000	0.000000
4	0	1	0.000000	0.000000
5	0	1	0.000000	0.000000
6	0	1	0.000000	0.000000
7	0	1	0.000000	0.000000
8	0	1	0.000000	0.000000
9	0	1	0.000000	0.000000
10	0	0	0.000000	0.000000
19	0	0	0.000000	0.000000
28	0	0	0.000000	0.000000
37	0	0	0.000000	0.000000
46	0	0	0.000000	0.000000
55	0	0	0.000000	0.000000
64	0	0	0.000000	0.000000
73	0	0	0.000000	0.000000
85	0	0	0.000000	0.000000
98	0	0	0.000000	0.000000
101	0	0	0.000000	0.000000
102	0	1	0.000000	0.000000
103	0	1	0.000000	0.000000

PROP. REOLOGICAS

MODULO	ELASTICIDAD	G	COEF	POISSON	COHES	ANG	FUERZA	MASIC
X	Y		X	Y		ROZ	Y	X
5000.0	5000.0	1500.0	0.333	0.333	2.000	30.000	2.000	0.000

FUERZA MASICA (0=NO HAY FUERZA , 1=HAY FUERZA)

Y	X
1	0
9	0.000000 9.491001
18	0.000000 18.532001
27	0.000000 17.631000
36	0.000000 16.731002
45	0.000000 15.830001
54	0.000000 14.930000
63	0.000000 14.029001

72	0.000000	13.128000
81	0.000000	12.297000
95	0.000000	5.958000

CARGAS

NCDD	CARGA X	CARGA Y	NCDD	CARGA X	CARGA
1	0.000000	9.760015	2	0.000000	12.204902
3	0.000000	7.221279	4	0.000000	5.552944
5	0.000000	5.870167	6	0.000000	6.118312
7	0.000000	6.291113	8	0.000000	6.382327
9	0.000000	11.576143	10	0.000000	14.186683
11	0.000000	25.060466	12	0.000000	16.019844
13	0.000000	10.791387	14	0.000000	11.445978
15	0.000000	11.968889	16	0.000000	12.347871
17	0.000000	12.570688	18	0.000000	24.829967
19	0.000000	13.506683	20	0.000000	23.870121
21	0.000000	15.259988	22	0.000000	10.276971
23	0.000000	10.898946	24	0.000000	11.395099
25	0.000000	11.753725	26	0.000000	11.963129
27	0.000000	23.626022	28	0.000000	12.826681
29	0.000000	22.679779	30	0.000000	14.500131
31	0.000000	9.762554	32	0.000000	10.351915
33	0.000000	10.821311	34	0.000000	11.159574
35	0.000000	11.355566	36	0.000000	22.423084
37	0.000000	12.146680	38	0.000000	21.489433
39	0.000000	13.740270	40	0.000000	9.248140
41	0.000000	9.804835	42	0.000000	10.247520
43	0.000000	10.565429	44	0.000000	10.748604
45	0.000000	21.219142	46	0.000000	11.466678
47	0.000000	20.299091	48	0.000000	12.980413
49	0.000000	8.733720	50	0.000000	9.257858
51	0.000000	9.673730	52	0.000000	9.971275
53	0.000000	10.140440	54	0.000000	20.016201
55	0.000000	10.786685	56	0.000000	19.108749
57	0.000000	12.220558	58	0.000000	8.219299
59	0.000000	8.710821	60	0.000000	9.099941
61	0.000000	9.377134	62	0.000000	9.532880
63	0.000000	18.812259	64	0.000000	10.106695
65	0.000000	17.918430	66	0.000000	11.509689
67	0.000000	7.510488	68	0.000000	7.090185
69	0.000000	7.120746	70	0.000000	7.428449
71	0.000000	8.130907	72	0.000000	17.608333
73	0.000000	9.213371	74	0.000000	14.359191
75	0.000000	8.750947	76	0.000000	6.396348
77	0.000000	6.155321	78	0.000000	5.571572
79	0.000000	5.460132	80	0.000000	6.194690
81	0.000000	16.077976	82	0.000000	4.440840
83	0.000000	1.856241	84	0.000000	1.645008
85	0.000000	12.186674	86	0.000000	14.733364
87	0.000000	3.585005	88	0.000000	2.086004
89	0.000000	0.727538	90	0.000000	1.495874
91	0.000000	2.715641	92	0.000000	2.849550
93	0.000000	2.739020	94	0.000000	2.755805
95	0.000000	8.218177	96	0.000000	6.056147
97	0.000000	2.595000	98	0.000000	17.946704
99	0.000000	29.361163	100	0.000000	7.599491
101	0.000000	6.666687	102	0.000000	18.336723
103	0.000000	10.006698	104	0.000000	0.000000

ESCALA LONG= 0.33311 TENS= 0.00066

RESULTADOS

3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

RESIDUOS DEL SISTEMA DE ECUACIONES

0.0000E 00	0.0000E 00	0.0000E 00	0.3854E-08	0.0000E 00	0.2000E-0
0.2989E-07	0.3154E-07	0.5638E-08	0.4027E-08	0.0000E 00	0.0000E 0
-0.9080E-08	-0.1513E-08				
0.0000E 00	0.0000E 00	0.5717E-07	0.2444E-07	0.4527E-07	0.2707E-0
-0.8585E-09	0.2601E-08	0.9604E-09	0.1909E-07	-0.3783E-08	0.9313E-0
-0.9662E-08	0.2182E-08	0.1332E-08	0.8149E-08	0.1667E-07	-0.5376E-0
0.0000E 00	0.0000E 00	0.1020E-06	0.4340E-07	0.1056E-06	0.6251E-0
0.2447E-07	0.1020E-06	-0.9502E-08	0.5689E-07	-0.3667E-08	0.1379E-0
-0.1411E-08	0.5682E-08	-0.4842E-07	-0.5471E-07	-0.4842E-07	-0.6402E-0
0.0000E 00	0.0000E 00	0.9311E-07	0.4925E-07	0.5215E-07	0.4649E-0
0.2246E-07	0.4141E-07	-0.1052E-07	0.1078E-07	-0.1407E-07	-0.1658E-0
-0.1656E-07	-0.3510E-08				
0.0000E 00	0.0000E 00	0.5839E-07	0.3231E-07	0.8093E-07	0.9678E-0
0.9284E-08	0.2738E-07	0.5180E-08	-0.5404E-07	-0.3515E-07	0.6948E-0
-0.9400E-08	0.7064E-09				
0.0000E 00	0.0000E 00	0.5924E-07	0.4447E-07	0.5948E-07	0.1294E-0
0.1862E-08	-0.1251E-07	-0.1126E-07	0.4487E-07	-0.3987E-08	-0.3296E-0
-0.3620E-07	0.7158E-08				
0.0000E 00	0.0000E 00	0.6370E-07	0.5579E-07	0.5139E-07	0.1227E-0
0.6373E-08	0.7858E-08	0.2793E-08	0.1207E-06	-0.1455E-07	0.3496E-0
-0.1353E-07	-0.6028E-07				
0.0000E 00	0.0000E 00	0.4417E-07	0.4915E-07	0.3614E-07	0.1051E-0
0.8032E-08	0.3010E-07	-0.1647E-07	0.3354E-07	-0.2817E-07	-0.1458E-0
-0.2747E-07	-0.3386E-07				
0.0000E 00	0.0000E 00	0.2711E-07	0.6711E-07	0.1932E-07	0.9368E-0
0.8149E-09	0.8845E-07	-0.5587E-08	0.6583E-07	-0.2805E-07	0.5430E-0
-0.1752E-07	-0.5512E-07				
0.0000E 00	0.0000E 00	0.2111E-07	0.8571E-07	0.1041E-07	0.6661E-0
-0.7566E-09	0.1545E-06	-0.1402E-07	-0.1827E-06	0.8032E-08	0.8208E-0
-0.1775E-07	-0.2955E-07				
0.0000E 00	0.0000E 00	0.0000E 00	0.1676E-07	0.0000E 00	0.1559E-0
0.0000E 00	0.6984E-09	0.0000E 00	0.2328E-07	0.0000E 00	0.1257E-0
0.0000E 00	-0.1862E-08				

PUNTO ABSCISA ORDENADA

1	1.8299	16.2999
2	1.8299	12.7989
3	1.7999	10.5606
4	1.7363	8.9987
5	1.6662	7.2771
6	1.5896	5.3957
7	1.5065	3.3546
8	1.4169	1.1539
9	5.4049	16.2999
10	5.4049	12.7989
11	5.3162	10.5606
12	5.1282	8.9987
13	4.9209	7.2771
14	4.6945	5.3957
15	4.4488	3.3546
16	4.1839	1.1540
17	8.8099	16.2999
18	8.8099	12.7989
19	8.6651	10.5606
20	8.3582	8.9987
21	8.0199	7.2771
22	7.6502	5.3957
23	7.2491	3.3547
24	6.8167	1.1540
25	12.0449	16.2999
26	12.0449	12.7989
27	11.8465	10.5606
28	11.4263	8.9988
29	10.9630	7.2771
30	10.4568	5.3958
31	9.9076	3.3547
32	9.3155	1.1541
33	15.1099	16.2999
34	15.1099	12.7989
35	14.8606	10.5606
36	14.3326	8.9988
37	13.7505	7.2772
38	13.1143	5.3958
39	12.4242	3.3548
40	11.6802	1.1542
41	18.0049	16.2999
42	18.0049	12.7989
43	17.7074	10.5607
44	17.0770	8.9988
45	16.3821	7.2772
46	15.6228	5.3958
47	14.7990	3.3548
48	13.9108	1.1542
49	20.7299	16.2999
50	20.7299	12.7989
51	20.3867	10.5607
52	19.6595	8.9988
53	18.8580	7.2772
54	17.9821	5.3959
55	17.0319	3.3549
56	16.0074	1.1543

57	23.2849	16.2999
58	23.2849	12.7989
59	22.9208	10.5557
60	22.0005	9.0410
61	20.8685	7.2993
62	19.8272	5.3964
63	18.8006	3.3378
64	17.8083	1.0932
65	25.6299	16.2999
66	25.8981	13.6457
67	25.0665	12.4661
68	26.2449	12.0499
69	24.7247	10.7624
70	25.9180	10.9505
71	25.0346	10.1687
72	23.8004	8.9747
73	22.4441	7.2868
74	21.2322	5.4086
75	20.1408	3.3514
76	19.3696	1.0812
77	28.4699	16.2999
78	28.0855	13.6333
79	27.6049	12.0499
80	29.4311	12.4661
81	32.6999	16.2999
82	32.6999	12.7989

PUNTO MAS CARGADO

PUNTO ELEMENTOS FUNC PLAST

70 139 140 1.923046

PUNTOS QUE VAN A PLASTIFICAR

PUNTO ELEMENTOS FUNC PLAST

71 141 142 0.941522

HIPOTESIS CARGA 1

PUNTO	TENSION-X	TENSION-Y	TENSION-XY
1	-9.4326	-20.2654	-0.1825
2	-6.7778	-16.8038	-0.1021
3	-5.3967	-14.6312	-0.0524
4	-4.5273	-13.0129	-0.0162
5	-3.6648	-11.1991	0.0211
6	-2.8084	-9.1886	0.0592
7	-1.9346	-6.9895	0.0960
8	-0.9738	-4.6253	0.1287
9	-9.3016	-20.0752	-0.5241
10	-6.6397	-16.7316	-0.2938
11	-5.2294	-14.5484	-0.1641
12	-4.3949	-12.9857	-0.0644
13	-3.5638	-11.2248	0.0267
14	-2.7480	-9.2649	0.0981
15	-1.9318	-7.1133	0.1320
16	-1.0608	-4.7946	0.1012
17	-9.0615	-19.7201	-0.8957
18	-6.3544	-16.4398	-0.5421
19	-4.9710	-14.3549	-0.3379
20	-4.1625	-12.8508	-0.1802
21	-3.3842	-11.1527	-0.0302
22	-2.6430	-9.2489	0.0906
23	-1.9269	-7.1366	0.1525
24	-1.1848	-4.8273	0.1140
25	-8.6973	-19.0668	-1.2939
26	-5.9732	-15.8756	-0.8560
27	-4.6237	-13.9329	-0.6084
28	-3.8535	-12.5423	-0.3881
29	-3.1347	-10.9505	-0.1720
30	-2.4842	-9.1439	0.0144
31	-1.8955	-7.1080	0.1313
32	-1.3256	-4.8352	0.1234
33	-8.2104	-18.0066	-1.6990
34	-5.5469	-14.9107	-1.2532
35	-4.2321	-13.1678	-1.0058
36	-3.4948	-11.9660	-0.7268
37	-2.8335	-10.5533	-0.4372
38	-2.2731	-8.9087	-0.1699
39	-1.8189	-7.0137	0.0289
40	-1.4528	-4.8278	0.1005
41	-7.6292	-16.4653	-2.0645
42	-5.1553	-13.4195	-1.7301
43	-3.8565	-11.8885	-1.5446
44	-3.1293	-10.9816	-1.2334
45	-2.5077	-9.8698	-0.8691
46	-2.0281	-8.4886	-0.5050
47	-1.6872	-6.8148	-0.2007
48	-1.5194	-4.7953	0.0099
49	-7.0104	-14.4573	-2.3164
50	-4.9053	-11.3570	-2.2265
51	-3.5868	-9.9121	-2.1593
52	-2.8374	-9.3826	-1.9053
53	-2.1913	-8.7149	-1.5060
54	-1.7756	-7.8041	-1.0451
55	-1.5163	-6.4992	-0.6111
56	-1.4634	-4.7196	-0.1962

TENSION-1	TENSION-2	ANGULO 1-X	FUNC PLAST
-9.4295	-20.2685	-0.9649	-1.1575
-6.7767	-16.8049	-0.5838	-0.5087
-5.3964	-14.6315	-0.3251	-0.2248
-4.5272	-13.0129	-0.1098	-0.0820
-3.6648	-11.1991	0.1608	0.0295
-2.8078	-9.1892	0.5320	0.1105
-1.9328	-6.9913	1.0884	0.1721
-0.9692	-4.6299	2.0173	0.2485
-9.2761	-20.1006	-2.7787	-1.1153
-6.6311	-16.7401	-1.6663	-0.4550
-5.2265	-14.5513	-1.0089	-0.1628
-4.3944	-12.9861	-0.4301	-0.0284
-3.5638	-11.2249	0.1997	0.0770
-2.7465	-9.2664	0.8623	0.1482
-1.9284	-7.1167	1.4589	0.1921
-1.0581	-4.7973	1.5520	0.2342
-8.9868	-19.7949	-4.7706	-1.0341
-6.3254	-16.4689	-3.0682	-0.3618
-4.9588	-14.3671	-2.0599	-0.0735
-4.1588	-12.8546	-1.1880	-0.0546
-3.3841	-11.1528	-0.2233	0.1444
-2.6418	-9.2501	0.7857	0.1912
-1.9224	-7.1411	1.6758	0.1983
-1.1812	-4.8309	1.7913	0.1857
-8.5383	-19.2258	-7.0066	-0.9221
-5.8998	-15.9491	-4.9044	-0.2525
-4.5841	-13.9725	-3.7240	0.0318
-3.8362	-12.5596	-2.5530	0.1517
-3.1309	-10.9543	-1.2602	0.2254
-2.4842	-9.1439	0.1240	0.2441
-1.8922	-7.1113	1.4424	0.2070
-1.3213	-4.8395	2.0119	0.1264
-7.9241	-18.2929	-9.5653	-0.7908
-5.3820	-15.0756	-7.4930	-0.1544
-4.1203	-13.2796	-6.3439	0.1326
-3.4329	-12.0279	-4.8690	0.2496
-2.8088	-10.5780	-3.2314	0.3105
-2.2687	-8.9131	-1.4663	0.3041
-1.8187	-7.0139	0.3193	0.2248
-1.4498	-4.8308	1.7049	0.0694
-7.1706	-16.9239	-12.5232	-0.6621
-4.8077	-13.7671	-11.3599	-0.0946
-3.5697	-12.1753	-10.5189	0.2116
-2.9401	-11.1708	-8.7205	0.3392
-2.4065	-9.9710	-6.6429	0.3971
-1.9888	-8.5279	-4.4434	0.3697
-1.6793	-6.8226	-2.2381	0.2576
-1.5193	-4.7953	0.1746	0.0342
-6.3486	-15.1190	-15.9433	-0.5667
-4.2115	-12.0508	-17.3070	-0.0842
-2.9199	-10.5790	-17.4622	0.2626
-2.3231	-9.8969	-15.1043	0.4225
-1.8604	-9.0458	-12.3921	0.5000
-1.5995	-7.9802	-9.5616	0.4592
-1.4424	-6.5730	-6.8916	0.3241
-1.4516	-4.7313	-3.4364	0.0543

57	-6.3182	-12.0185	-2.4049
58	-4.9395	-9.0556	-2.6056
59	-3.4253	-7.1574	-2.6593
60	-2.7461	-7.1452	-2.5550
61	-2.0524	-7.1062	-2.2356
62	-1.6683	-6.9295	-1.7243
63	-1.3903	-6.1788	-1.1355
64	-1.2476	-4.5601	-0.4939
65	-5.4817	-9.4804	-2.2235
66	-5.4286	-6.6151	-2.4622
67	-5.2902	-6.8626	-2.7324
68	-5.7481	-3.8610	-2.7817
69	-4.7126	-4.8821	-3.3856
70	-5.1541	-4.2573	-4.0602
71	-3.4631	-4.2144	-3.5302
72	-2.6985	-4.4485	-2.9500
73	-2.1826	-5.0780	-2.6840
74	-1.6168	-5.5782	-2.4922
75	-1.2638	-6.0813	-1.9061
76	-0.7624	-4.9001	-0.8457
77	-5.0477	-7.4507	-1.5892
78	-5.0605	-4.1120	-1.4341
79	-5.6297	-2.3246	-1.4110
80	-5.0337	-1.7324	-1.0829
81	-5.0303	-6.9904	-0.4330
82	-4.2347	-1.8074	0.0996

-5.4391	-12.8975	-20.0793	-0.4935
-3.6772	-10.3180	-25.8486	-0.1029
-2.0426	-8.5401	-27.4722	0.3481
-1.5742	-8.3171	-24.6386	0.5188
-1.2054	-7.9532	-20.7505	0.6259
-1.1535	-7.4443	-16.6226	0.5749
-1.1346	-6.4344	-12.6876	0.4374
-1.1755	-4.6322	-8.3032	0.1596
-4.4908	-10.4712	-24.0198	-0.4331
-3.4891	-8.5546	-38.2274	-0.2760
-3.2330	-8.9197	-36.9748	-0.1124
-1.8671	-7.7420	35.6320	0.3089
-1.4107	-8.1840	-44.2839	0.5704
-0.6208	-8.7906	41.8495	1.0000
-0.2886	-7.3890	-41.9638	0.9415
-0.4964	-6.6505	-36.7404	0.7449
-0.5807	-6.6798	-30.8294	0.7126
-0.4141	-6.7809	-25.7624	0.7994
-0.6009	-6.7442	-19.1783	0.7132
-0.5962	-5.0663	-11.1176	0.4731
-4.2569	-8.2416	-26.4555	-0.6536
-3.0757	-6.0969	35.8514	-0.4518
-1.8042	-6.1501	20.2465	0.1064
-1.4088	-5.3573	16.6341	0.1632
-4.9389	-7.0818	-11.9192	-1.1164
-1.8033	-4.2388	-2.3475	-0.1690

NODO	DESPLAZ-X	DESPLAZ-Y	DESPL PARC-X	DESPL PARC-Y
1	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.011102	0.000000	0.011102
3	0.000000	0.018248	0.000000	0.018248
4	0.000000	0.021396	0.000000	0.021396
5	0.000000	0.024530	0.000000	0.024530
6	0.000000	0.027518	0.000000	0.027518
7	0.000000	0.030209	0.000000	0.030209
8	0.000000	0.032444	0.000000	0.032444
9	0.000000	0.034067	0.000000	0.034067
10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
11	0.000891	0.011027	0.000891	0.011027
12	0.001206	0.018208	0.001206	0.018208
13	0.001236	0.021357	0.001236	0.021357
14	0.001195	0.024507	0.001195	0.024507
15	0.001086	0.027527	0.001086	0.027527
16	0.000924	0.030270	0.000924	0.030270
17	0.000741	0.032578	0.000741	0.032578
18	0.000603	0.034303	0.000603	0.034303
19	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
20	0.001786	0.010924	0.001786	0.010924
21	0.002438	0.018067	0.002438	0.018067
22	0.002486	0.021228	0.002486	0.021228
23	0.002403	0.024398	0.002403	0.024398
24	0.002183	0.027447	0.002183	0.027447
25	0.001850	0.030224	0.001850	0.030224
26	0.001468	0.032564	0.001468	0.032564
27	0.001156	0.034303	0.001156	0.034303
28	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
29	0.002711	0.010692	0.002711	0.010692
30	0.003700	0.017714	0.003700	0.017714
31	0.003773	0.020878	0.003773	0.020878
32	0.003640	0.024072	0.003640	0.024072
33	0.003293	0.027162	0.003293	0.027162
34	0.002764	0.029990	0.002764	0.029990
35	0.002143	0.032377	0.002143	0.032377
36	0.001599	0.034139	0.001599	0.034139
37	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
38	0.003632	0.010253	0.003632	0.010253
39	0.004967	0.016997	0.004967	0.016997
40	0.005075	0.020150	0.005075	0.020150
41	0.004896	0.023372	0.004896	0.023372
42	0.004413	0.026526	0.004413	0.026526
43	0.003664	0.029444	0.003664	0.029444
44	0.002763	0.031929	0.002763	0.031929
45	0.001920	0.033764	0.001920	0.033764
46	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
47	0.004458	0.009530	0.004458	0.009530
48	0.006152	0.015749	0.006152	0.015749
49	0.006331	0.018860	0.006331	0.018860
50	0.006131	0.022112	0.006131	0.022112
51	0.005524	0.025363	0.005524	0.025363
52	0.004551	0.028431	0.004551	0.028431
53	0.003340	0.031098	0.003340	0.031098
54	0.002125	0.033097	0.002125	0.033097
55	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
56	0.005048	0.008473	0.005048	0.008473

57	0.007105	0.013834	0.007105	0.013834
58	0.007421	0.016831	0.007421	0.016831
59	0.007270	0.020092	0.007270	0.020092
60	0.006583	0.023479	0.006583	0.023479
61	0.005405	0.026781	0.005405	0.026781
62	0.003890	0.029742	0.003890	0.029742
63	0.002247	0.032046	0.002247	0.032046
64	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
65	0.005243	0.007113	0.005243	0.007113
66	0.007628	0.011263	0.007628	0.011263
67	0.008155	0.013989	0.008155	0.013989
68	0.008179	0.017152	0.008179	0.017152
69	0.007515	0.020665	0.007515	0.020665
70	0.006195	0.024308	0.006195	0.024308
71	0.004428	0.027732	0.004428	0.027732
72	0.002353	0.030520	0.002353	0.030520
73	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
74	0.004964	0.005496	0.004964	0.005496
75	0.007540	0.008381	0.007540	0.008381
76	0.008373	0.010422	0.008373	0.010422
77	0.008579	0.014247	0.008579	0.014247
78	0.007964	0.018172	0.007964	0.018172
79	0.006641	0.022141	0.006641	0.022141
80	0.004822	0.025845	0.004822	0.025845
81	0.002554	0.028488	0.002554	0.028488
82	0.006022	0.005922	0.006022	0.005922
83	0.006774	0.006416	0.006774	0.006416
84	0.007686	0.007702	0.007686	0.007702
85	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
86	0.004373	0.004096	0.004373	0.004096
87	0.005399	0.004780	0.005399	0.004780
88	0.006051	0.004814	0.006051	0.004814
89	0.007348	0.006087	0.007348	0.006087
90	0.008133	0.007715	0.008133	0.007715
91	0.008555	0.011143	0.008555	0.011143
92	0.008184	0.014960	0.008184	0.014960
93	0.006998	0.019293	0.006998	0.019293
94	0.005268	0.023710	0.005268	0.023710
95	0.002997	0.026186	0.002997	0.026186
96	0.004257	0.003799	0.004257	0.003799
97	0.004443	0.003506	0.004443	0.003506
98	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
99	0.002739	0.002917	0.002739	0.002917
100	0.003186	0.002585	0.003186	0.002585
101	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
102	0.000000	0.003454	0.000000	0.003454
103	0.000000	0.003458	0.000000	0.003458

FIN DEL ESCALON ELASTICO

PUNTOS QUE PLASTIFICAN

PUNTO ELEMENTOS FUNC PLAST

53			1.0077
60			1.0406
61			1.0089
62			1.0111
63			1.0154
69			1.0147
71			1.0408
72			1.0218
73			1.0690
74			1.0133
75			1.0402
76			1.0145
53	105	106	1.000000
54	107	108	0.941557

PUNTO	TENSION-X	TENSION-Y	TENSION-XY
1	-17.9194	-38.4385	-0.3356
2	-12.8985	-31.8575	-0.1882
3	-10.2561	-27.7265	-0.0998
4	-8.5743	-24.6581	-0.0364
5	-6.8888	-21.2259	0.0286
6	-5.1960	-17.4278	0.0955
7	-3.4568	-13.2740	0.1628
8	-1.5577	-8.7981	0.2287
9	-17.6888	-38.1180	-0.9686
10	-12.6517	-31.7420	-0.5456
11	-9.9606	-27.5803	-0.3148
12	-8.3450	-24.6085	-0.1401
13	-6.7148	-21.2687	0.0170
14	-5.0891	-17.5609	0.1398
15	-3.4438	-13.4954	0.2036
16	-1.6977	-9.1092	0.1651
17	-17.2592	-37.5113	-1.6580
18	-12.1372	-31.2489	-0.9952
19	-9.5070	-27.2535	-0.6273
20	-7.9452	-24.3752	-0.3532
21	-6.4103	-21.1393	-0.0991
22	-4.9083	-17.5285	0.1034
23	-3.4221	-13.5340	0.2154
24	-1.8853	-9.1678	0.1731
25	-16.5893	-36.3635	-2.4062
26	-11.4330	-30.2892	-1.5608
27	-8.8935	-26.5579	-1.1012
28	-7.4187	-23.8624	-0.7157
29	-5.9971	-20.7949	-0.3542
30	-4.6437	-17.3442	-0.0505
31	-3.3527	-13.4797	0.1529
32	-2.0853	-9.1800	0.1730
33	-15.6676	-34.4288	-3.1895
34	-10.6011	-28.5838	-2.3114
35	-8.1831	-25.3303	-1.8266
36	-6.8042	-22.9592	-1.3113
37	-5.5122	-20.1728	-0.8178
38	-4.3062	-16.9671	-0.3882
39	-3.2074	-13.3215	-0.0477
40	-2.2444	-9.1651	0.1156
41	-14.5620	-31.5096	-3.9196
42	-9.8115	-25.7631	-3.2864
43	-7.4025	-23.0673	-2.9502
44	-6.1443	-21.4959	-2.2912
45	-4.9921	-19.2368	-1.6089
46	-3.9333	-16.4176	-0.9916
47	-2.9705	-13.0412	-0.4504
48	-2.2801	-9.1141	-0.0478
49	-13.3929	-27.6073	-4.4262
50	-9.4151	-21.6912	-4.3061
51	-6.8629	-18.9854	-4.3319
52	-5.4414	-18.4417	-3.8679
53	-4.4785	-17.8436	-3.0021
54	-3.5478	-15.8264	-2.0556
55	-2.6698	-12.8444	-1.1288
56	-2.0791	-9.0311	-0.3523

TENSION-1	TENSION-2	ANGULO 1-X	FUNC PLAST
-17.9139	-38.4440	-0.9369	-2.2079
-12.8966	-31.8593	-0.5687	-0.9858
-10.2556	-27.7271	-0.3274	-0.4386
-8.5743	-24.6582	-0.1297	-0.1535
-6.8887	-21.2260	0.1145	0.0808
-5.1953	-17.4285	0.4473	0.2660
-3.4541	-13.2767	0.9503	0.4206
-1.5505	-8.8053	1.8076	0.5995
-17.6430	-38.1639	-2.7085	-2.1310
-12.6361	-31.7576	-1.6357	-0.8877
-9.9549	-27.5859	-1.0233	-0.3288
-8.3438	-24.6097	-0.4935	-0.0607
-6.7148	-21.2687	0.0670	0.1623
-5.0875	-17.5625	0.6425	0.3320
-3.4397	-13.4996	1.1604	0.4590
-1.6940	-9.1129	1.2755	0.5817
-17.1244	-37.6462	-4.6495	-1.9812
-12.0855	-31.3005	-2.9731	-0.7152
-9.4848	-27.2757	-2.0221	-0.1700
-7.9376	-24.3827	-1.2312	0.0823
-6.4096	-21.1400	-0.3856	0.2759
-4.9074	-17.5294	0.4695	0.4052
-3.4176	-13.5386	1.2198	0.4743
-1.8812	-9.1719	1.3610	0.5092
-16.3007	-36.6521	-6.8393	-1.7680
-11.3046	-30.4175	-4.7001	-0.5045
-8.8251	-26.6263	-3.5538	0.0218
-7.3876	-23.8935	-2.4876	0.2498
-5.9886	-20.8034	-1.3704	0.4096
-4.6435	-17.3444	-0.2278	0.4927
-3.3504	-13.4820	0.8650	0.4952
-2.0811	-9.1842	1.3965	0.4245
-15.1402	-34.9562	-9.3896	-1.5102
-10.3087	-28.8762	-7.2086	-0.2958
-7.9906	-25.5227	-6.0136	0.2239
-6.6985	-23.0649	-4.6106	0.4286
-5.4667	-20.2183	-3.1831	0.5511
-4.2943	-16.9790	-1.7549	0.5912
-3.2071	-13.3217	-0.2703	0.5341
-2.2424	-9.1670	0.9569	0.3521
-13.6994	-32.3722	-12.4118	-1.2593
-9.1610	-26.4136	-11.1972	-0.1542
-6.8653	-23.6045	-10.3200	0.4342
-5.8097	-21.8306	-8.3102	0.6353
-4.8127	-19.4163	-6.3647	0.7185
-3.8550	-16.4959	-4.5132	0.7117
-2.9504	-13.0613	-2.5559	0.6077
-2.2798	-9.1144	-0.4012	0.3283
-12.1273	-28.8729	-15.9571	-1.0837
-8.0553	-23.0511	-17.5261	-0.1608
-5.4740	-20.3743	-17.7768	0.5704
-4.3777	-19.5055	-15.3776	0.9198
-3.8351	-18.4869	-12.0961	1.0000
-3.2128	-16.1614	-9.2563	0.9415
-2.5461	-12.9681	-6.2554	0.7693
-2.0612	-9.0489	-2.8942	0.4135

57	-11.9845	-22.7854	-4.5961
58	-9.6295	-17.2973	-4.9164
59	-6.4973	-13.6454	-5.3769
60	-5.3376	-13.3009	-5.0896
61	-4.2157	-12.9176	-4.1762
62	-3.3734	-13.7678	-3.0710
63	-2.1409	-12.3057	-1.7353
64	-1.4888	-8.9760	-0.6851
65	-10.3566	-17.7990	-4.2472
66	-10.2194	-12.1016	-4.6592
67	-10.4196	-13.0429	-5.2654
68	-10.2067	-6.4106	-5.1142
69	-9.6123	-8.8980	-6.3751
70	-8.1094	-6.1035	-5.1897
71	-5.1216	-6.1162	-4.5992
72	-3.6370	-6.6961	-4.0756
73	-2.9608	-7.6236	-3.8462
74	-2.3039	-8.0800	-3.2546
75	-1.9421	-10.1022	-2.5527
76	-0.8504	-8.8902	-1.1905
77	-9.5186	-13.9516	-2.9660
78	-9.4794	-7.4608	-2.5376
79	-10.2569	-3.9282	-2.3589
80	-9.2792	-3.1758	-1.9079
81	-9.4495	-13.1654	-0.8020
82	-7.8968	-3.3976	0.2104

-10.2934	-24.4765	-20.2005	-0.9242
-7.2288	-19.6980	-26.0268	-0.2869
-3.6149	-16.5278	-28.1945	0.8203
-2.8572	-15.7814	-25.9823	1.0000
-2.5357	-14.5976	-21.9136	1.0000
-2.5339	-14.6073	-15.2897	1.0000
-1.8528	-12.5938	-9.4259	1.0000
-1.4266	-9.0382	-5.1858	0.6868
-8.4310	-19.7246	-24.3887	-0.8036
-6.4072	-15.9138	-39.2909	-0.4773
-6.3049	-17.1575	-38.0067	-0.2535
-2.8536	-13.7638	34.8199	0.7510
-2.8700	-15.6403	43.3974	1.0000
-1.8207	-12.3922	39.5314	1.0002
-0.9929	-10.2449	-41.9152	1.0000
-0.8134	-9.5197	-34.7150	1.0000
-0.7945	-9.7898	-29.3894	1.0000
-0.8408	-9.5432	-24.2079	1.0000
-1.2094	-10.8349	-16.0166	1.0000
-0.6778	-9.0628	-8.2490	1.0000
-8.0323	-15.4378	-26.6155	-1.2498
-5.7392	-11.2010	34.1561	-0.8683
-3.1456	-11.0395	18.3521	0.2313
-2.6285	-9.8266	16.0074	0.2802
-9.2838	-13.3312	-11.6750	-2.0957
-3.3878	-7.9066	-2.6722	-0.3257

NODO	DESPLAZ-X	DESPLAZ-Y	DESPL PARC-X	DESPL PARC-Y
1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0000	0.0210	0.0000	0.0010
3	0.0000	0.0345	0.0000	0.0017
4	0.0000	0.0405	0.0000	0.0021
5	0.0000	0.0464	0.0000	0.0024
6	0.0000	0.0521	0.0000	0.0027
7	0.0000	0.0572	0.0000	0.0029
8	0.0000	0.0615	0.0000	0.0032
9	0.0000	0.0647	0.0000	0.0033
10	0.0000	0.0600	0.0000	0.0000
11	0.0016	0.0209	0.0000	0.0010
12	0.0022	0.0345	0.0001	0.0017
13	0.0023	0.0404	0.0001	0.0021
14	0.0022	0.0464	0.0001	0.0024
15	0.0021	0.0521	0.0001	0.0027
16	0.0018	0.0573	0.0001	0.0029
17	0.0015	0.0618	0.0001	0.0032
18	0.0013	0.0651	0.0001	0.0034
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0.0033	0.0207	0.0001	0.0010
21	0.0045	0.0342	0.0002	0.0017
22	0.0046	0.0402	0.0002	0.0021
23	0.0045	0.0462	0.0002	0.0024
24	0.0042	0.0520	0.0002	0.0027
25	0.0036	0.0573	0.0002	0.0029
26	0.0030	0.0618	0.0002	0.0032
27	0.0025	0.0651	0.0002	0.0034
28	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
29	0.0050	0.0203	0.0002	0.0010
30	0.0069	0.0337	0.0003	0.0017
31	0.0070	0.0396	0.0003	0.0021
32	0.0068	0.0457	0.0003	0.0024
33	0.0063	0.0515	0.0003	0.0027
34	0.0055	0.0569	0.0003	0.0029
35	0.0044	0.0615	0.0002	0.0032
36	0.0035	0.0649	0.0002	0.0034
37	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
38	0.0068	0.0195	0.0003	0.0010
39	0.0092	0.0324	0.0004	0.0017
40	0.0095	0.0384	0.0004	0.0020
41	0.0092	0.0445	0.0004	0.0023
42	0.0084	0.0505	0.0004	0.0026
43	0.0072	0.0560	0.0004	0.0029
44	0.0058	0.0607	0.0004	0.0032
45	0.0043	0.0642	0.0003	0.0034
46	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
47	0.0084	0.0102	0.0004	0.0009
48	0.0115	0.0302	0.0005	0.0016
49	0.0118	0.0362	0.0005	0.0019
50	0.0115	0.0424	0.0005	0.0023
51	0.0105	0.0485	0.0005	0.0026
52	0.0090	0.0543	0.0005	0.0029
53	0.0070	0.0593	0.0005	0.0031
54	0.0050	0.0631	0.0004	0.0033
55	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
56	0.0095	0.0162	0.0005	0.0008

57	0.0134	0.0265	0.0007	0.0014
58	0.0140	0.0323	0.0007	0.0017
59	0.0137	0.0388	0.0006	0.0021
60	0.0125	0.0453	0.0006	0.0025
61	0.0107	0.0516	0.0005	0.0029
62	0.0082	0.0571	0.0006	0.0031
63	0.0055	0.0614	0.0006	0.0033
64	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
65	0.0099	0.0135	0.0005	0.0006
66	0.0144	0.0213	0.0007	0.0010
67	0.0155	0.0266	0.0007	0.0013
68	0.0156	0.0329	0.0007	0.0017
69	0.0144	0.0402	0.0007	0.0022
70	0.0123	0.0474	0.0006	0.0028
71	0.0095	0.0539	0.0007	0.0031
72	0.0061	0.0590	0.0007	0.0033
73	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
74	0.0094	0.0103	0.0004	0.0005
75	0.0140	0.0158	0.0007	0.0008
76	0.0161	0.0197	0.0009	0.0010
77	0.0174	0.0270	0.0012	0.0013
78	0.0170	0.0349	0.0014	0.0018
79	0.0141	0.0438	0.0014	0.0025
80	0.0105	0.0511	0.0008	0.0032
81	0.0068	0.0560	0.0008	0.0035
82	0.0113	0.0110	0.0005	0.0005
83	0.0123	0.0117	0.0005	0.0005
84	0.0147	0.0140	0.0008	0.0005
85	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
86	0.0082	0.0076	0.0004	0.0003
87	0.0100	0.0087	0.0005	0.0004
88	0.0111	0.0086	0.0005	0.0004
89	0.0158	0.0095	0.0010	0.0002
90	0.0190	0.0125	0.0016	0.0003
91	0.0204	0.0201	0.0020	0.0008
92	0.0204	0.0278	0.0022	0.0013
93	0.0182	0.0366	0.0022	0.0019
94	0.0125	0.0473	0.0018	0.0028
95	0.0084	0.0525	0.0016	0.0036
96	0.0079	0.0070	0.0003	0.0003
97	0.0082	0.0064	0.0004	0.0003
98	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
99	0.0051	0.0054	0.0002	0.0002
100	0.0059	0.0048	0.0002	0.0002
101	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
102	0.0000	0.0065	0.0000	0.0003
103	0.0000	0.0065	0.0000	0.0003

FIN DE LA ITERACION PLASTICA NUMERO 9

TALUD ISORRESISTENTE CON DILATANCIA NULA

12 103 164 0 1 0 24 0 1 1

ATCS TALUD

2	6	9	2	25	32	1				
4.000	3.002	1.493	2.283	3.660	2.300	3.380	5.000	2.740		

TIPO ZCN DESPL CARG NUM

SUEL HET PRESC SUC FASES

1 0 22 0 0

PROP. REOLOGICAS

MODULO X	ELASTICIDAD Y	G	COEF X	POISSON Y	COHES	ANG ROZ	FUERZA MASICA Y	DILAT X
-------------	------------------	---	-----------	--------------	-------	------------	--------------------	------------

5000.0	5000.0	1500.0	0.333	0.333	2.000	30.000	2.000	0.000
--------	--------	--------	-------	-------	-------	--------	-------	-------

FUERZ CONC AUM

0 10 100

RESIDUOS

12
 0.0000E 00 0.0000E 00 0.0000E 00 0.2497E-09 0.0000E 00 0.7594E-10
 0.8130E-09 0.1055E-08 -0.1136E-09 -0.1083E-09 0.0000E 00 0.0000E 00
 -0.4220E-09 -0.8731E-10
 0.0000E 00 0.0000E 00 0.1898E-08 0.1229E-08 0.1971E-08 0.7130E-09
 0.1289E-09 0.1077E-09 -0.2364E-10 0.1637E-09 -0.2326E-09 0.6020E-09
 -0.5411E-09 -0.6548E-10 -0.1169E-08 -0.3492E-09 0.3410E-09 -0.1388E-08
 0.0000E 00 0.0000E 00 0.7325E-08 0.2848E-08 0.4076E-08 0.2167E-08
 0.8324E-09 0.2058E-08 0.2887E-08 0.3592E-08 0.1818E-10 0.1546E-09
 0.3910E-09 0.2395E-08 -0.1862E-08 -0.1818E-08 -0.1280E-08 -0.5456E-09
 0.0000E 00 0.0000E 00 0.4242E-08 0.1879E-08 0.3972E-08 0.3537E-08
 0.4265E-09 0.2910E-10 -0.2332E-09 0.4738E-08 0.3083E-09 0.2785E-08
 -0.4238E-09 -0.7992E-10
 0.0000E 00 0.0000E 00 0.3788E-08 0.2417E-08 0.1895E-08 0.4342E-08
 -0.1582E-09 0.3579E-08 -0.5302E-09 -0.3061E-08 -0.1615E-08 0.3778E-08
 -0.3401E-09 0.1881E-09
 0.0000E 00 0.0000E 00 0.3927E-08 0.3231E-08 0.2795E-08 0.5810E-08
 -0.1491E-09 0.2118E-08 -0.5911E-10 0.2494E-08 -0.6530E-09 -0.3590E-08
 -0.2348E-08 0.1072E-09
 0.0000E 00 0.0000E 00 0.2575E-08 0.3810E-08 0.2526E-08 0.6213E-08
 0.2819E-09 0.4395E-08 -0.4965E-09 0.1776E-08 -0.3492E-09 0.3213E-08
 -0.1617E-08 -0.3859E-08
 0.0000E 00 0.0000E 00 0.2467E-08 0.4934E-08 0.1504E-08 0.5224E-08
 -0.9094E-10 0.1680E-08 -0.7876E-09 -0.1705E-10 -0.1477E-08 0.1898E-09
 -0.1416E-08 -0.1836E-08
 0.0000E 00 0.0000E 00 0.6693E-09 0.1879E-08 0.9749E-09 0.4335E-08
 0.1382E-09 0.5147E-08 -0.7712E-09 -0.6481E-09 -0.2510E-09 0.3072E-08
 -0.1160E-08 -0.2162E-08
 0.0000E 00 0.0000E 00 0.5529E-09 0.3218E-08 0.6693E-09 0.5853E-08
 -0.5584E-09 0.3554E-08 -0.1928E-09 -0.4512E-08 -0.7421E-09 0.4383E-09
 -0.3637E-09 -0.4974E-09
 0.0000E 00 0.0000E 00 0.0000E 00 0.1367E-08 0.0000E 00 0.8440E-09
 0.0000E 00 -0.2619E-09 0.0000E 00 0.1207E-08 0.0000E 00 0.1600E-08
 0.0000E 00 -0.5820E-09

PUNTOS QUE VAN A PLASTIFICAR

PUNTO ELEMENTOS FUNC PLAST

52 103 104 0.954210
 53 1.0104
 54 1.0145
 54 107 108 1.000000
 60 1.0196
 61 1.0026
 62 1.0226
 63 1.0026
 69 1.0055
 71 1.0231
 72 1.0032
 73 1.0307
 74 1.0085
 75 1.0220
 76 1.0321

HIPOTESIS CARGA 1

PUNTO	TENSION-X	TENSION-Y	TENSION-XY
1	-17.9165	-38.4256	-0.3341
2	-12.8964	-31.8457	-0.1879
3	-10.2476	-27.7148	-0.1006
4	-8.5585	-24.6482	-0.0380
5	-6.8625	-21.2191	0.0262
6	-5.1562	-17.4242	0.0926
7	-3.4023	-13.2734	0.1599
8	-1.4900	-8.7998	0.2262
9	-17.6894	-38.1127	-0.9651
10	-12.6525	-31.7342	-0.5455
11	-9.9559	-27.5715	-0.3175
12	-8.3323	-24.6002	-0.1451
13	-6.6904	-21.2623	0.0099
14	-5.0494	-17.5566	0.1325
15	-3.3878	-13.4931	0.1976
16	-1.6264	-9.1089	0.1615
17	-17.2652	-37.5183	-1.6522
18	-12.1437	-31.2525	-0.9930
19	-9.5087	-27.2528	-0.6295
20	-7.9384	-24.3731	-0.3596
21	-6.3892	-21.1378	-0.1093
22	-4.8683	-17.5267	0.0932
23	-3.3632	-13.5318	0.2076
24	-1.8079	-9.1670	0.1683
25	-16.6009	-36.3878	-2.3993
26	-11.4446	-30.3122	-1.5555
27	-8.9056	-26.5787	-1.0998
28	-7.4210	-23.8741	-0.7211
29	-5.9808	-20.8058	-0.3669
30	-4.6023	-17.3502	-0.0607
31	-3.2901	-13.4800	0.1468
32	-2.0009	-9.1793	0.1681
33	-15.6826	-34.4689	-3.1844
34	-10.6151	-28.6297	-2.3064
35	-8.2005	-25.3824	-1.8259
36	-6.8233	-23.0146	-1.3141
37	-5.5020	-20.2103	-0.8351
38	-4.2586	-16.9909	-0.3945
39	-3.1401	-13.3290	-0.0454
40	-2.1541	-9.1652	0.1128
41	-14.5815	-31.5563	-3.9188
42	-9.8239	-25.8116	-3.2926
43	-7.4314	-23.1527	-2.9635
44	-6.1625	-21.5855	-2.3142
45	-5.0021	-19.3922	-1.6451
46	-3.8655	-16.4743	-0.9844
47	-2.8951	-13.0627	-0.4266
48	-2.1887	-9.1170	-0.0432
49	-13.4086	-27.6398	-4.4301
50	-9.4556	-21.7414	-4.3164
51	-6.8728	-18.9928	-4.3740
52	-5.4610	-18.6271	-3.9452
53	-4.5263	-17.9474	-3.0436
54	-3.3989	-15.9606	-2.0180
55	-2.5780	-12.8803	-1.0575
56	-1.9964	-9.0337	-0.3323
57	-12.0038	-22.7923	-4.6003

TENSION-1	TENSION-2	ANGULO 1-X	FUNC PLAST
-17.9111	-38.4311	-0.9331	-2.2085
-12.8945	-31.8475	-0.5682	-0.9866
-10.2471	-27.7153	-0.3300	-0.4366
-8.5584	-24.6483	-0.1356	-0.1481
-6.8624	-21.2192	0.1046	0.0912
-5.1555	-17.4249	0.4324	0.2826
-3.3998	-13.2760	0.9282	0.4441
-1.4830	-8.8068	1.7710	0.6289
-17.6439	-38.1582	-2.6995	-2.1322
-12.6369	-31.7498	-1.6364	-0.8891
-9.9502	-27.5772	-1.0324	-0.3280
-8.3310	-24.6015	-0.5111	-0.0564
-6.6904	-21.2623	0.0392	0.1719
-5.0480	-17.5580	0.6070	0.3484
-3.3839	-13.4970	1.1201	0.4828
-1.6229	-9.1124	1.2361	0.6125
-17.1313	-37.6522	-4.6333	-1.9833
-12.0923	-31.3040	-2.9670	-0.7176
-9.4864	-27.2751	-2.0295	-0.1708
-7.9305	-24.3809	-1.2528	0.0851
-6.3884	-21.1386	-0.4248	0.2848
-4.8677	-17.5274	0.4221	0.4221
-3.3590	-13.5360	1.1695	0.4992
-1.8041	-9.1709	1.3099	0.5425
-16.3141	-36.6746	-6.8160	-1.7705
-11.3172	-30.4395	-4.6816	-0.5068
-8.8374	-26.6468	-3.5474	0.0194
-7.3895	-23.9056	-2.5048	0.2507
-5.9717	-20.8148	-1.4168	0.4185
-4.6020	-17.3505	-0.2732	0.5116
-3.2880	-13.4821	0.8256	0.5222
-1.9969	-9.1833	1.3410	0.4607
-15.1575	-34.9940	-9.3638	-1.5123
-10.3245	-28.9204	-7.1816	-0.2962
-8.0086	-25.5743	-5.9998	0.2235
-6.7174	-23.1206	-4.6101	0.4285
-5.4548	-20.2575	-3.2393	0.5619
-4.2464	-17.0031	-1.7732	0.6154
-3.1399	-13.3292	-0.2555	0.5642
-2.1523	-9.1670	0.9222	0.3911
-13.7204	-32.4174	-12.3921	-1.2619
-9.1723	-26.4632	-11.1936	-0.1520
-6.8913	-23.6928	-10.3285	0.4357
-5.8227	-21.9253	-8.3526	0.6433
-4.8165	-19.5779	-6.4396	0.7402
-3.7891	-16.5507	-4.4376	0.7481
-2.8772	-13.0806	-2.3986	0.6421
-2.1884	-9.1173	-0.3579	0.3683
-12.1422	-28.9062	-15.9532	-1.0853
-8.0907	-23.1063	-17.5477	-0.1682
-5.4591	-20.4064	-17.9109	0.5815
-4.3693	-19.7187	-15.4674	0.9542
-3.8663	-18.6054	-12.4989	1.0000
-3.0827	-16.2768	-8.9063	1.0000
-2.4706	-12.9877	-5.8009	0.8048
-1.9808	-9.0494	-2.6978	0.4484
-10.3085	-24.4875	-20.2293	-0.9291

58	-9.6497	-17.2894	-4.9426
59	-6.6541	-13.7418	-5.3829
60	-5.0476	-12.9743	-4.8604
61	-3.8244	-12.5701	-3.8635
62	-3.0921	-13.4188	-2.8527
63	-2.1170	-12.2910	-1.6196
64	-1.4648	-8.8623	-0.6570
65	-10.3482	-17.7644	-4.2456
66	-10.2399	-12.0554	-4.6468
67	-10.5470	-12.9319	-5.2943
68	-10.7699	-6.5085	-4.9496
69	-9.3286	-8.6905	-6.2381
70	-6.4186	-5.4946	-4.6877
71	-4.1975	-5.8018	-4.1960
72	-3.3848	-6.6066	-3.9173
73	-2.8555	-7.5061	-3.7066
74	-2.3041	-8.0733	-3.2443
75	-2.0229	-10.0098	-2.6239
76	-0.8353	-9.0027	-1.1670
77	-9.5025	-13.9101	-2.9542
78	-9.4496	-7.3805	-2.4890
79	-10.0440	-3.8461	-2.2234
80	-9.1579	-3.1339	-1.8483
81	-9.4145	-13.1264	-0.7961
82	-7.8313	-3.3784	0.2218

-7.2229	-19.7162	-26.1512	-0.2917
-3.7532	-16.6427	-28.3209	0.7770
-2.7395	-15.2825	-25.4029	1.0000
-2.3621	-14.0324	-20.7312	1.0000
-2.3564	-14.1545	-14.4604	1.0000
-1.8654	-12.5426	-8.8306	1.0000
-1.4069	-8.9202	-5.0362	0.6782
-8.4193	-19.6933	-24.4335	-0.8031
-6.4130	-15.8823	-39.4737	-0.4844
-6.3125	-17.1664	-38.6540	-0.2555
-3.2504	-14.0280	33.3551	0.6173
-2.7632	-15.2558	43.5367	1.0000
-1.2461	-10.6671	42.1864	1.0000
-0.7277	-9.2717	-39.5895	1.0000
-0.7601	-9.2313	-33.8237	1.0000
-0.8052	-9.5565	-28.9501	1.0000
-0.8475	-9.5300	-24.1799	1.0000
-1.2379	-10.7947	-16.6540	1.0000
-0.6718	-9.1662	-7.9743	1.0000
-8.0206	-15.3920	-26.6394	-1.2513
-5.7196	-11.1106	33.7155	-0.8729
-3.1310	-10.7591	17.8300	0.1972
-2.6120	-9.6798	15.7684	0.2661
-9.2510	-13.2900	-11.6087	-2.0875
-3.3673	-7.8423	-2.8451	-0.3261

NODO	DESPLAZ-X	DESPLAZ-Y	DESPL PARC-X	DESPL PARC-Y
1	0.000060	0.000060	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.021029	0.000000	0.001093
3	0.000000	0.034559	0.000000	0.001793
4	0.000000	0.040519	0.000000	0.002101
5	0.000000	0.046460	0.000000	0.002409
6	0.000000	0.052137	0.000000	0.002706
7	0.000000	0.057274	0.000000	0.002980
8	0.000000	0.061573	0.000000	0.003217
9	0.000000	0.064738	0.000000	0.003400
10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
11	0.001649	0.020908	0.000075	0.001092
12	0.002258	0.034505	0.000107	0.001796
13	0.002335	0.040465	0.000114	0.002104
14	0.002291	0.046431	0.000118	0.002412
15	0.002130	0.052164	0.000120	0.002711
16	0.001875	0.057390	0.000119	0.002987
17	0.001579	0.061820	0.000116	0.003228
18	0.001345	0.065174	0.000112	0.003420
19	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
20	0.003310	0.020745	0.000153	0.001092
21	0.004557	0.034286	0.000215	0.001798
22	0.004686	0.040267	0.000227	0.002106
23	0.004590	0.046266	0.000234	0.002415
24	0.004264	0.052045	0.000237	0.002713
25	0.003744	0.057330	0.000236	0.002990
26	0.003128	0.061816	0.000231	0.003233
27	0.002600	0.065197	0.000221	0.003427
28	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
29	0.005041	0.020364	0.000239	0.001086
30	0.006911	0.033717	0.000326	0.001794
31	0.007090	0.039707	0.000339	0.002105
32	0.006923	0.045745	0.000346	0.002413
33	0.006404	0.051589	0.000349	0.002711
34	0.005580	0.056955	0.000348	0.002988
35	0.004584	0.061520	0.000343	0.003232
36	0.003670	0.064945	0.000327	0.003428
37	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
38	0.006795	0.019609	0.000336	0.001062
39	0.009289	0.032518	0.000447	0.001768
40	0.009519	0.038511	0.000454	0.002087
41	0.009272	0.044604	0.000453	0.002402
42	0.008544	0.050555	0.000454	0.002702
43	0.007384	0.056069	0.000454	0.002980
44	0.005945	0.060796	0.000451	0.003225
45	0.004541	0.064348	0.000432	0.003425
46	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
47	0.008412	0.018267	0.000435	0.000998
48	0.011570	0.030286	0.000578	0.001670
49	0.011897	0.036284	0.000582	0.002010
50	0.011582	0.042500	0.000561	0.002356
51	0.010655	0.048649	0.000556	0.002680
52	0.009153	0.054425	0.000555	0.002966
53	0.007232	0.059454	0.000556	0.003214
54	0.005232	0.063281	0.000540	0.003418
55	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
56	0.009585	0.016248	0.000508	0.000872

57	0.013458	0.026570	0.000696	0.001435
58	0.014065	0.032460	0.000710	0.001786
59	0.013785	0.038906	0.000694	0.002179
60	0.012701	0.045509	0.000672	0.002615
61	0.010879	0.051773	0.000655	0.002955
62	0.008476	0.057303	0.000660	0.003214
63	0.005805	0.061617	0.000655	0.003418
64	0.000000	0.060000	0.000000	0.000000
65	0.009951	0.013548	0.000524	0.000696
66	0.014405	0.021398	0.000737	0.001083
67	0.015526	0.026640	0.000781	0.001360
68	0.015738	0.033054	0.000844	0.001790
69	0.014696	0.040506	0.000859	0.002307
70	0.012596	0.047794	0.000791	0.002898
71	0.009720	0.054239	0.000772	0.003268
72	0.006375	0.059280	0.000781	0.003454
73	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
74	0.009403	0.010349	0.000487	0.000517
75	0.014059	0.015815	0.000695	0.000783
76	0.016054	0.019736	0.000846	0.000984
77	0.017019	0.027224	0.001070	0.001434
78	0.016322	0.035578	0.001164	0.002075
79	0.013944	0.044400	0.001080	0.002828
80	0.010705	0.051524	0.000904	0.003384
81	0.007099	0.056320	0.000916	0.003592
82	0.011266	0.010980	0.000562	0.000527
83	0.012299	0.011652	0.000575	0.000527
84	0.014423	0.014221	0.000732	0.000652
85	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
86	0.008235	0.007572	0.000417	0.000368
87	0.010025	0.008711	0.000493	0.000412
88	0.010893	0.008643	0.000504	0.000399
89	0.014162	0.010757	0.000745	0.000472
90	0.016485	0.014292	0.000979	0.000665
91	0.017798	0.021452	0.001245	0.001146
92	0.017670	0.029042	0.001410	0.001633
93	0.015605	0.038454	0.001361	0.002388
94	0.011829	0.048180	0.001105	0.003243
95	0.008141	0.052934	0.001048	0.003702
96	0.007852	0.007015	0.000381	0.000344
97	0.008068	0.006460	0.000381	0.000316
98	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
99	0.005087	0.005467	0.000249	0.000279
100	0.005838	0.004870	0.000281	0.000252
101	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
102	0.000000	0.006519	0.000000	0.000338
103	0.000000	0.006548	0.000000	0.000343

FIN DE LA ITERACION PLASTICA NUMERO 9

Apéndice E

N O T A C I O N



APENDICE ~~E~~
=====

NOTACION
=====

Indice de símbolos

- B = matriz que relaciona corrimientos y deformaciones de los nodos de un elemento.
- c = cohesión.
- d = desplazamiento.
- D = matriz tensión deformación.
- E = módulo de elasticidad o Young.
- e = deformación.
- e^e = deformación elástica.
- e^p = deformación plástica.
- e = índice de poros.
- f = función o criterio de rotura.
- F = fuerza concentrada en un nodo.
- G = módulo de deformación transversal.
- g = deformación angular.
- I = invariante del tensor de tensiones.
- J = invariante del tensor desviador de tensiones.
- k = índice de entumecimiento de la arcilla.
- K = matriz de rigidez (elementos finitos).
- K = módulo de deformación volumétrica (elasticidad).
- K = constantes diversas.
- L = índice de compresión de la arcilla.
- m = coeficiente de Poisson.
- M = pendiente de la recta de resistencia intrínseca en el plano "p-q".
- p = presión media o esférica.
- q = desviador de tensiones.
- S = tensión.
- t = tensión tangencial = S_{ij} .
- u = corrimiento según el eje " x ".
- v = corrimiento según el eje " y " (elementos finitos).

v = ángulo de dilatación (plasticidad).

W_p = trabajo plástico.

ϕ = ángulo de rozamiento interno.

γ = densidad.

Apéndice F

B I B L I O G R A F I A

APENDICE -F-
=====

BIBLIOGRAFIA
=====

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 1.- ALLEN, D.N.G. y SOUTHWELL, R. "Relaxation method applied to engineering problems. Plastic straining in two dimensional stress systems" P.T. Royal Soc. London, núm. 850, vol. 242, págs. 379-414.
- 2.- ANAGNOSTI, P. "Three dimensional stability of fill dams" Proc. Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. 1.969 Mexico, vol. 2, págs. 275-280.
- 3.- ANG, A.H.S. y HARPER, G.N. "Analysis of contained plastic flow in - plane solids" Proc. ASCE. Journ. Eng. Mech. Div. 1.964, EM 5 págs. 397-418.
- 4.- BROWN, C.B. y KING, I.P. "Automatic embankement analysis, equilibrium and inestability conditions" Géotechnique vol. 16, núm. 3, 1.966, págs. 209-219.
- 5.- CHOPRA "Earthquake response of earth dams" Journ. Soil Mech., marzo 1.967, SM 2, pág. 65.
- 6.- CLOUGH, R.W. y WOODWARD, R.J. "Analysis of embankement stresses and deformations" Proc. ASCE, Journ. Soil Mech. Found. Div., julio 1.967 SM 4, págs. 529-549.
- 7.- DIBIEJ, M. y PENZIER, J. "Response of earth dams to travelling seismic waves" Journ. Soil Mech., marzo 1.969, SM 2, págs. 541-559.
- 8.- DUNLOP, P. y DUNCAN, J.M. "Development of failure around excava-

ted slopes" Proc. ASCE, Journ. Soil Mech. Found. Div., SM 2, marzo 1.970, págs. 471-493.

- 9.- DUNCAN, J.M. y CHIN YUNG CHANG "Analysis of soil movement around a deep excavation" Proc. ASCE, Journ. Soil Mech., SM 5, septiembre 1.970, págs. 1.655-1.681.
- 10.- ENTRECANALES IBARRA, J. y LORENTE DE NO, C. "Apuntes de Geotécnia, cimientos y puentes de fábrica. Muros y Taludes" Madrid.
- 11.- ESCARIO, V. "Estabilidad de presas de tierra y escollera" Monografía 1 Lab. Transporte y Mecánica del Suelo. Madrid 1.966.
- 12.- FORT LOPEZ-TELLO, L. "Cálculo de cimentaciones con la consideración de los fenómenos viscoelastoplásticos en el terreno y en la estructura de cimentación" Tesis doctoral. Mayo 1.968, Escuela T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid.
- 13.- FRONTARD, J. "Surfaces de glissement et calculs de stabilité des massifs en terre à profil curviligne" Travaux Junio 1.948, págs. 301-312.
- 14.- HAYASHI, M. e HIBINO, S. "Progressive relaxation of Rock Masses during excavation of underground cavity" Symp. Int. Rocks Mech. 1.968, Madrid, págs. 343-349.
- 15.- JENIKE, A.W. y CHENG YEN, B. "Slope stability in axial symmetry" Rock Mech. Proc. 5º Symp. Minnesota. Pergamon Press 1.963. págs. 689-711.

- 16.- JIMENEZ SALAS, J.A. y SERRANO GONZALEZ, A. "Nuevas perspectivas en el cálculo de presas de materiales sueltos" Rev. Obras Públicas Agosto 1.967, págs. 793-812.
- 17.- JURISIC, D.A. "Discussion to the analysis of contained plastic flow in plane solids" Proc. ASCE, Journ. Engin. Mech. Div. 1.965, EM 3 págs. 286-292.
- 18.- LORENTE DE NO CABEZAS, C. "Plastic flow behind a vertical excavation" Tesis Master, M.I.T. Junio 1.966.
- 19.- LORENTE DE NO CABEZAS, C. "Elastoplastic stress strain distribution during in situ shear test" Proc. Symp. Rock Mech. 1.968 Madrid, págs. 183-187.
- 20.- LORENTE DE NO CABEZAS, C. "Stability of slopes with curvature in plane view" Proc. Int. Conf. Soil Mech. 1.969 Mexico, vol.2, págs. 635-638.
- 21.- LUMING, H. "Lumped parameter approach to axisymmetric dynamic soil deformation" Proc. Symp. Application of finite elements meth. in civil engineering. Nashville, Tenn. Noviembre 1.969, págs. 642-662.
- 22.- RICHARDS, R, y SCHMID, W.E. "Body force stresses in gravity structures" Proc. ASCE, Journ. Soil Mech. SM 1, enero 1.968, págs. 205-229.
- 23.- RICHARDS, R. "Discussion to slopes in stiff fissured clays and shales" Proc. ASCE, Journ. Soil Mech., SM 1, enero 1.970, págs. 338-340.

- 24.- SERRANO GONZALEZ, A. "Métodos de diferencias finitas en el estudio de la deformabilidad de suelos" 1.967. Laboratorio de Transportes y Mecánica de Suelo, Madrid.
- 25.- SERRANO GONZALEZ, A. "Taludes, muros, empuje y corrimientos de tierras" . Curso general de Carreteras, tomo I, págs. 305-338. Madrid 1.968.
- 26.- SOKOLOWSKY, V.V. "Stations of soil media". Londres 1.960.
- 27.- TORROJA, E. "Elasticidad". Madrid 1.963.
- 28.- TURNBULL, W.J. y HVORSLEV, M.J. " Special problems in slope stability" Proc. ASCE, Journ. Soil Mech., SM 4, Julio 1.967, págs. 499-528.
- 29.- URIEL ROMERO, S. "Cálculo de taludes isorresistentes por el método de las características y su aplicación al proyecto de presas de materiales sueltos" Rev. Obras Públicas, Agosto 1.967, págs. 845-858.
- 30.- URIEL ROMERO, S. "Design of loose fill dam slopes by the method of characteristics" Proc. Int. Conf. Soil Mech. 1.969 México, vol. 2, - págs. 387-395.
- 31.- WATT, B.J. y CHRISTIAN, J.T. "Prediction of the deformation of a levee on a soft foundation" Research- Report. R69-18 Soils Publication 233, M.I.T., Diciembre 1.968.
- 32.- WHITMAN, R.V. y BAILEY, W.A. "Use of computers for slope stability analysis" Proc. ASCE Soil Mech. Found. Div., SM 4 Julio 1.967, págs. 475-498.

Appendice A - Plasticidad

- A-1) BAKER W.H. y KRIZEK R.J. "Mohr Coulomb strenght theory for anisotropic soils" Proc. ASCE Journal Soil Mech. Found Div. SM1 Enero 1.970 - págs. 269-291.

- A-2) BISHOP A.W. " The strenght of soils as engineering materials". 6 Rankine Lecture. 1.966. Geotechnique, Vol.16 nº2, págs. 91-149.

- A-3) BISHOP A.W. " Discussion" Proc. Geotechnical Conf. Oslo 1.967. Vol. 2, págs. 201-284.

- A-4) BRANSBY P.L. " Stress and strain in sand caused by rotation of a model wall" Tesis doctoral. 1.968. Cambridge University.

- A-5) COLEMAN J.D. "Correspondence".- Suction and yield and failure surface for soil in principal effective stress space". Geotechnique 1.960. Vol. 10, págs. 181-183.

- A-6) DAHD D. y VOIGHT B. " Isotropic and anisotropic plastic yield Associated with cylindrical underground excavations" Proceed. Intern.Symposium Large Permanent Underground Openings 1.969 Oslo, págs.105-110.

- A-7) DRUCKER D.C. y PRAGER W. "Soil Mechanics and Plastic analysis or limit design". Quaterly of Applied Mathematics 1.952. Vol. 10 nº2, págs. 157-165.

- A-8) DRUCKER D.C. "Limit analysis of two and three dimensional soil mechanics problems" Journ. of Mech and Physics of solids. 1.953 V61.1 págs.217-226.

- A-9) DRUCKER D.C. "Coulomb friction, plasticity and limit loads" Journal Applied. Mech. Marzo 1.954, págs. 71-74.

- A-10) DRUCKER D.C., GIBSON R.E. y HENKEL D.J. "Soil Mechanics and work-hardening theories of plasticity", transactions ASCE 1.957, Vol. 122, págs. 338-346.
- A-11) FILOMENKO-BORODICH "Teoria de la elasticidad" Buenos Aires 1.963.
- A-12) FUNCI L. "On the uniqueness of solution in statics continua with general differential stress-strain relations". Cap. IV Pág 715-728 del libro "Second Order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics" de M. Reiner y D. Abir 1.964 Jerusalem.
- A-13) FUNG Y.C. "Foundations of solid mechanics" Prentice Hall, Inc. (N.Jersey) 1.965.
- A-14) HAYTHORNTHWAITE R.M. "The role of friction in granular media" Symp. Grenoble IUTAM 1.964 págs. 160-163.
- A-15) HANSEN, Bent "Line ruptures regarded as narrow rupture zones. Basic equations based on kinematic considerations" Proc. Conf. Brussels on Earth Pressure Problems 1.958, págs. 39-48.
- A-16) HILL R. "The mathematical theory of plasticity". Oxford Clarendon Press 1.950.
- A-17) ILIOUCHINE, A.A. "Plasticité. Deformations elasto plastiques" Eyrolles Paris. 1.956.
- A-18) JENIKE A.W. y SHIELD R.T. "On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure", transactions ASME, Journal Applied Mech, Dic. 1.959 págs. 599-602.
- A-19) JOSSELING DE JONG G. "Lower bound collapse theorem and lack of normality of strainrate to yield surface for soils". Rheology and Soil Mech. Symp. Grenoble IUTAM Abril 1.964, págs. 69-78.

- A-10) DRUCKER D.C., GIBSON R.E. y HENKEL D.J. "Soil Mechanics and work-hardening theories of plasticity", transactions ASCE 1.957, Vol. 122, págs. 338-346.
- A-11) FILONENKO-BORODICH "Teoria de la elasticidad" Buenos Aires 1.963.
- A-12) FUNCI L. "On the uniqueness of solution in statics continua with general differential stress-strain relations". Cap. IV Pág 715-728 del libro "Second Order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics" de M. Reiner y D. Abir 1.964 Jerusalem.
- A-13) FUNG Y.C. "Foundations of solid mechanics" Prentice Hall, Inc. (N.Jersey) 1.965.
- A-14) HAYTHORNTHWAITE R.M. "The role of friction in granular media" Symp. Grenoble IUTAM 1.964 págs. 160-163.
- A-15) HANSEN, Bent "Line ruptures regarded as narrow rupture zones. Basic equations based on kinematic considerations" Proc. Conf. Brussels on Earth Pressure Problems 1.958, págs. 39-48.
- A-16) HILL R. "The mathematical theory of plasticity". Oxford Clarendon Press 1.950.
- A-17) ILIOUCHINE, A.A. "Plasticité. Deformations elasto plastiques" Eyrolles Paris. 1.956.
- A-18) JENIKE A.W. y SHIELD R.T. "On the plastic flow of Coulomb solids beyond original failure", transactions ASME, Journal Applied Mech, Dic. 1.959 págs. 599-602.
- A-19) JOSSELING DE JONG G. "Lower bound collapse theorem and lack of normality of strainrate to yield surface for soils". Rheology and Soil Mech. Symp. Grenoble IUTAM Abril 1.964, págs. 69-78.

- A-20) KIRKPATRIK W.M. "The condition of failure for sands". Proceed 4th Int. Conf. Soil Mech and Found. Eng. 1.957, Londres, Vol.1 págs.172-178.
- A-21) LOMIZE G.M. "On the strength of sand". Proc. Geotechnical Conf. Oslo 1.967 Tom. 1, págs. 215-219.
- A-22) MALYSHEV M.V. "A generalization of the Mohr Coulomb strength criterion for soils". Proc. Geotechnical Conf. Oslo 1.967 Tomo 1 págs.221-224.
- A-23) MANDEL J. "Conditions de stabilité et postulat de Drucker" Sym.Grenoble IUTAM 1.964, págs 58-68.
- A-24) MANDL G. y FERNANDEZ LUQUE R. "Fully developed plastic shear flow of granular materials" Geotechnique Sept. 1.970, págs. 277-307.
- A-25) OLSZAK W., MROZ Z. y PERZYNA P. "Recent trends in the development of the theory of plasticity". Pergamon Press 1.963.
- A-26) PARISEAU W.G. "A new view of the ideal plasticity of soils and unconsolidated rock materials" Int. J.Rock.Mech.Min. Sci.Vol.3, 1966,pg. 307-317
- A-27) PICKERING D.J. "Anisotropic elastic parameters for soils " Geotechnique Sept. 1.970, págs. 271-276.
- A-28) PRAGUER W. y HODGE P.G. "Theory of perfectly plastic solids" N. Y.1.951.
- A-29) PRAGUER W."Introduction to Plasticity" Addison Wesley 1.959.
- A-30) ROSCOE K.H., SCHOFIELD A.N. y WROTH M.A. "On the Yielding of soils" Geotechnique 1.958.Vol.8 n^o1, págs. 22-53.
- A-31) ROSCOE K.H. , SCHOFIELD A.N. y THURAIRAJAH A. "Yielding of clays in states wetter than critical".Geotechnique 1.963, págs. 221-240.
- A-32) ROSCOE K.H. y BURLAND J.B. "On the generalized stress-strain behaviour of wet clay" oápg.535-609 del libro "Engineering plasticity"Ed.Hayman Leckie 1.968 Cambridge.

- A-33) ROSCOE K.H. "The influence of strains in soil mechanics" "Rankine lecture X. Geotechnique Feb. 1.970, págs. 129-170.
- A-34) SCOTT R.F. y HON YIM KO "Deformation of sand at failure" Proc. ASCE julio 1.968. SM -4, págs. 883-898.
- A-35) SCOTT R.F. y HON YIM KO "Stress deformation and strength characteristics" State of de art Report. Congreso Int. Soil Mech. Méjico 1.969 Vol.3 Pág.1-47.
- A-36) SERRANO GONZALEZ, Aleibiades. " Extensión of simple velocity - fields " Proyecto del Curso Avanzado 1.968 - 1.969 Cambridge University.
- A-37) SCHOFIELD A.N. y WROTH C.P. "Critical State Soil Mechanics" Mc. Graw Hill 1.968.
- A-38) SHIELD R.T. "Mixed boundary value problems in soil mechanics" Quaterly of Applied Mathematics. 1.953. Vol 11. n°1, págs. 61-75.
- A-39) SHIELD R.T. "Stress and velocity fields in soil mechanics" Journal of - Mathem. and Physic 1.954 Vol.33 n°2, págs. 144-156.
- A-40) SHIELD R.T. "On Coulomb's law of failure in soils" Journal of the Mechanics and Physics of solids. 1.955 Cel.4, págs 10-16.
- A-41) SHUNSUKE TAKAGI "Plane plastic deformation of soils" Proc.ASCE Jun.1.962 EM3, págs. 107-151. +
- A-42) SUKLJE L. "Rheological aspects of soil mechanics" John Wiley 1.969.
- A-43) YOUNG R.W. y WAR KENTIN B.P. "Introduction to soil behavior" Mc. Gill 1.966. N. York.

Apéndice B - Método de los elementos finitos

- B-1) ABSI E. "Methode des elements finis". Annales de l'I.T.B.T.P. Oct. 1.969
págs 1.594-1.621.
Estudio general del método, bastante comprimido, dentro del que expresa claramente el aspecto energético del mismo.
- B-2) AGARWAL R.K. y BOSHKOV S.H. "Stresses and displacements around a circular tunnel in a three layer medium". Int. J. Rock Mech Min Sci. Vol. 6, pág. 519-540.
- B-3) AKYUZ F.A. y MERVIN J.E. "Solution of nonlinear problems of elastoplasticity by the finite element method". A.I.A.A. Vol. 6 nº 10. Oct. 1.968
págs. 1.825-1.831.
- B-4) ANDERHEGGEN E. "Finite element plate bending equilibrium analysis" Proc. ASCE. Ag. 1.969 EM4, págs. 841-857.
- B-5) ANDERSON H.W. y DODD J.S. "Finite element method applied to rock mechanics" 1 Intern. Cong. Rock Mech Lisboa 1.967. Vol. II, págs. 317-321.
- B-6) ARANTES OLIVEIRA, E.R. de "Theoretical foundations of the finite element method" Intern. Journ. Solids and Structures Vol. 4 nº 10 Oct. 1.968
págs. 929-952.
Es el estudio más riguroso realizado hasta hoy sobre la validez del método.
- B-7) ARGYRIS J.H. "Elasto plastic matrix displacement Analysis of three dimensional continua" technical note Journ. Royal Aeronaut. Soc. Vol. 69 Sept. 1.965, págs. 633 a 636.
- B-8) ARRIAGA F.J. "Stress Analysis for gravity dams and foundations including rheological behavior" Symp. Int. Rock Mech. Madrid 1.968 págs. 329-334.

- B-9) BLAKE W. "Applications of the finite element method of analysis in solving boundary value problems in rock mechanics" Int. Jour. Rock Mech. and Mining Science 1.966 Vol. 3, págs 169-180.
- B-10) CLOUGH R.W. "The finite element method in plane stress analysis" Proc. ASCE. 2nd. Conf. on Electronic Computation. Pittsburgh. Sept. 1.960.
- B-11) CLOUGH R.W. y WILSON E.L. "Stress Analysis of a gravity dam by the finite element method" Symp. on the use of computers in Civil engineering. Lisboa Oct. 1.962, pág. 29.
- B-12) CLOUGH R.W., WILSON E.L. y KING I.P. "Large capacity multistory frame analysis programs". Ag. 1.963 ST4, págs. 179-204.
Introduce un método directo muy práctico de resolución de sistemas bandas, y lo compara con el iterativo de Gauss Seidel.
- B-13) CLOUGH R.W. y YUSEF RASHID "Finite element analysis of axi-symmetric solids" Proc. ASCE Feb. 1.965 EMI. págs. 71-85.
- B-14) CLOUGH R.W. "Comparison of three dimensional finite elements" Procs. Simpos. Applicat. fin. el. meth. in civil engineering. Nov. 1.969 págs. 1-26
Nashville (Tennessee).
- B-15) CONNOR J. y WILL G. "Computer aided teaching of the finite element displacement method". Research Report 69-23 MIT. 1.969.
Interesante contribución al método en lo referente a la aplicación práctica del mismo, con experimentación de la convergencia obtenida con diferentes formas de elementos y tamaños de malla. Dedicó gran extensión al problema de placas.
- B-16) CONSTANTINO C.J. "Finite element approach to stress wave problems" Proc. ASCE, Abril 1.967. EM2, págs. 153-176.

- B-17) CROSE J.G. y ANG A.H.S. "Nonlinear analysis method for circular plates".
Proc. ASCE Ag. 1.969, EM4, págs. 979-999.
- B-18) CHRISTIAN J.T. "Undrained stress distribution by numerical methods" Proc.
ASCE Nov. 1.968 SM6, págs. 1.333-1.345.
- B-19) DUNCAN J.M. y DUNLOP P. "Slopes in stiff fissured clays and shales " Proc.
ASCE, Marz. 1.969 SM2, págs. 467-491.
- B-20) ELIAS Z.M. "Duality in finite element method" Proc. ASCE Ag. 1.968, EM4,
págs. 931-945.
- B-21) FRAEJIS DE VEUBEKE B. "Displacement and equilibrium models in the finite
element method" Capit. 9 de "Stress Analysis" Zienkiewicz y Holister
Wiley 1.965 (Referencia obtenida en Ref. B-52).
- B-22) GIRIJAVALLABHAN C.V. y REESE L.C. "Finite element method for problems in
soil mechanics" Proc. ASCE Marzo 1.968 SM2, págs. 473-496.
- B-23) GUELLEC P. "Presentation de la méthode des éléments finis en vue de ses
applications aux problèmes de Genie Civil "Minis. de l'Equipement -
Lab. Central Ponts et Chaussées, Sect. de Sols MR49, Dic. 1.969.
Es uno de los estudios más completos y positivos que existen, con incor-
poraciones en lo relativo al método de tensiones y al híbrido de tensio-
nes y deformaciones.
- B-24) GUELLEC P. "Calcul des écoulements en milieu poreux par la méthode des élé-
ments finis" Avril 1.970, Lab. Ponts et Chaussées.
- B-25) GUELLEC P. "Etude du principe de l'énergie potentielle minimum par la métho-
de des éléments finis" Oct. 1.969 Minis. de l'Equipement Lab. Ponts et
Chaussées.
- B-26) GOODMAN R.E. "On the distribution of stresses around circular tunnels in
non homogeneous rock ". Int. Cong. Rock Mech. 1.967 Lisboa Vol. 2 pág.
249.

- B-27) HOEG K., CHRISTIAN J.T. y WHITMAN R.V. "Settlement of strip load on elastic plastic soil" Proc. ASCE, Marzo 1.968, ~~SM2~~, págs. 431-445.
- B-28) HOLAND I. y BERGAN P.G. "Discussion to Higher order finite element for plane stress" Proc. ASCE, Abril 1.968, págs. 698-702 EM2.
- B-29) HUANG Y.H. "Stresses and displacements in nonlinear soil media".Proc. ASCE Sept. 1.969, SM5, págs. 1.267-1.269.
- B-30) IDRISS I.M. y SEED H.B. "Response of earth bank during earthquakes" Proc. ASCE Mayo 1.967 SM3, págs. 61-82.
- B-31) LIAM FINN "Static and dynamic stresses in slopes" Proc. Int. C. Rock Mech. 1.966 Lisboa, Vol. II, págs. 167-169.
- B-32) LORENTE DE NO CABEZAS, CARLOS. Comunicaciones privadas .
- B-33) MARCAL P.V. y KING I.P. "Elastic plastic analysis of two dimensional stress systems by the finite element method". 1.967 Int. Journ. Mech. Sci. Vol. 9, págs. 143-155.
- B-34) Mc.CORMICK C.W. "Plane stress analysis" Proc. ASCE Ag. 1.963 ST4, pág. 37-54
- B-35) MELOSH R.J. "Structural analysis of solids" Proc. ASCE Ag. 1.963 ST4 págs. 205-223.
- Interesante estudio comparativo de las matrices de rigidez con cuatro tipos de elementos tridimensionales. Para trabajar en el espacio resulta necesario conocer este artículo.
- B-36) MORGENSTERN N.R. y TAMULY PHUKAN A.L. "Stresses and displacement in a homogeneous nonlinear foundation" Intern. Symp Rock Mech. Madrid 1.968 págs. 313 a 320.
- B-37) ODEN J.T. "Finite elements applications in nonlinear structural analysis" Proc. Symp. Ap. fin. el. meth. in Civil Engineering págs. 419-456 Nov. 1.969 Nashville.

escrito sobre problemas no lineales, la mayoría de elasticidad no lineal y grandes deformaciones.

- B-38) PIAN J.H. "Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution" Journ A.I.A.A. Jul. 1.964, págs. 1.333-1.336.
- B-39) POPE G. "A discrete element method for analysis of plane elastic-plastic stress problems" 1.965 R.A.E., T.R. 65028. (referencia tomada de Marcal y King).
 "The application of the matrix displacement method in plane elastic-plastic problems" Proc. Conf. Matrix Structu. Wright Patterson Ohio 1.965 (referencia tomada de Reyes).
- B-40) PRZEMIENIECKI J.S. "Theory of Matrix Structural Analysis" Mc. Graw Hill N.Y. 1.968.
- B-41) REYES S.F. y DEERE D.U. "Elastic plastic analysis of underground openings by the finite element method" Int. Cong. Rock Mech. Lisboa 1.966, págs. 477-486, Vol. 2.
 Representa el mayor esfuerzo realizado hasta ahora tanto en la obtención de las relaciones termodinámicas elastoplásticas en tres dimensiones, como en el refinamiento iterativo del método incremental de plastificación.
- B-42) SANDHU R.S. y WILSON E.L. "Finite element analysis of seepage in elastic media". Proc. ASCE, Jun 1.969, págs. 641-651.
- B-43) SMITH I.M. "Discussion to finite-element method for problems in soil mechanics" Proc. ASCE, Marzo 1.969, SM2, págs. 683-684.
- B-44) TOCHER J.L. y HARTZ B.J. "Higher order finite element for plane stress" Proc. ASCE, Ag. 1.967, págs. 149-168, EM4.

- B-45) TONG P. y PIAN T.H. "Elastic-plastic analysis of two dimensional stress systems by the finite element method" Intern. J. Mech.Sci. 1.967, Vol. 9 n°3, págs. 143-157.
- B-46) TURNER M.J., CLOUGH R.W., MARTIN H.C. y TOPP J.L. "Stiffness and deflection analysis of complex structures" Journ. Aero. Sciences 1.956, Vol. 23, págs. 805-823.
Referencia tomada de ZIENKIEWICZ.
- B-47) WANG Y.J. y VOIGHT B. "A discrete element stress analysis model for discontinuous materials" Proc. Int. Symp. Large Permanent Underground Openings, Oslo 1.969, págs. 111-115.
- B-48) WHANG B. "Elasto-plastic orthotropic plates and shells". "Proc. Symp. Applic. Fin. elem. meth. in Civil Engineering", págs. 481-516, Nov. 1.969 Nashville (Tennessee).
- B-49) WHITE R.N. "Optimum solution techniques for finite difference equations". Proc. ASCE Ag. 1.968, ST4, págs 115-137.
Apreciable estudio comparativo de los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones.
- B-50) WILSON E.L. "Structural analysis of axisymmetric solids" Vol. 3 n°12 Dic. 1.956, págs 2.269-2.274. Journ. American Inst. Aeronautic. and Astronaut.
- B-51) ZIENKIEWICZ O.C. y CHEUNG Y.K. "Application of the finite element method to problems of rock mechanics" Int. Cong. Rock Mech. Lisboa 1.966, Vol.1 págs. 661-672.
- B-52) ZIENKIEWICZ O.C. y CHEUNG Y.K. "The finite element method in structural and continuum mechanics" Mc. Graw Hill 1.967.
Es el único libro editado dedicado exclusivamente al método. Aunque le falta rigor en algunos puntos, es muy completo y práctico.

B-53) ZIENKIEWICZ O.C. "Continuum Mechanics as an approach to Rock Mass Problems". Cap.8 de "Rock Mechanics in Engineering Practice" de ZIENKIEWICZ y STAGG. págs. 237-273, JOHN WILEY 1.968 (Traducción española 1.970 por J. RODRIGUEZ ORTIZ).

Es interesante el caso de no linealidad debido a la no resistencia a tracción, así como la aplicación en tres dimensiones a presas bóvedas.
